Kramer

Elementar-Mathematik

für

Gymnasien.

Von

P. Philipp Kramer,

Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium, der Pädagogik am Lyceum zu St. Stephan und Direktor des k. Studien-Seminars St. Joseph in Augsburg.

II. Abtheilung:

Elementar-Geometrie.

Mit 213 Figuren auf 7 lithographirten Tafeln.

Zweite, durchaus verbesserte und vermehrte Auflage.

Augsburg,
Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.
1855.

Elementar-Geometrie

für

Gymnasien.

Von

P. Philipp Kramer,

Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium, der Pädagogik am Lyceum zu St. Stephan und Direktor des k. Studien-Seminars St. Joseph in Augsburg.

Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie.

Mit 213 Figuren auf 7 lithographirten Tafeln.

Zweite, durchaus verbesserte und vermehrte Auflage.

Augsburg,
Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.
1855.

Πρὸς πάσας μαθήσεις, ὥστε κάλλιον ἀποδέχεσθαι, ἴσμεν που ὅτι τῷ ὅλῳ καὶ παντὶ διοίσει ἡμμένος τε γεωμετρίας καὶ μή.

Plato (Polit. VII, 527.).

Aus dem Vorworte zur ersten Auflage.

Das Ziel, welches der Verfasser bei der Ausarbeitung des vorliegenden Lehrbuches stets im Auge hatte, war, ohne der wissenschaftlichen Strenge und Ordnung irgendwie Eintrag zu thun, die Lehren der Geometrie so einfach, klar und faßlich als möglich vorzutragen, und an Material nur so viel aufzunehmen, als ein Schüler des Gymnasiums sich eigen machen soll, um, nach seinem Abgange von demselben, die weitern mathematischen Disciplinen verstehen und mit Erfolg betreiben zu können.

Bei der Bearbeitung selbst wurden die besten Werke zu Rathe gezogen, sowie auch Winke und Andeutungen, welche in pädagogischen Zeitschriften von erfahrenen Schulmännern ausgesprochen wurden, benützt, soferne sie mit des Verfassers eigener Ansicht übereinstimmten.

Die ganze Anlage, die systematische Vertheilung und Behandlung des Lehrstoffes ist schon aus dem Inhaltsverzeichnisse ersichtlich, und der Verfasser hat darüber nur zu bemerken, daß er weder darin einen Mißgriff gethan zu haben glaubt, bei den einzelnen Abschnitten beinahe durch-

gängig theoretische und praktische Sätze (Lehrsätze und Aufgaben) geschieden zu haben, noch auch darin, daß er einige Sätze über die geometrische Construction algebraischer Ausdrücke (Formeln) einschaltete.

Besonderes Augenmerk wurde den Kapiteln über die Messung der Flächen und Körper zugewendet, einerseits um Gelegenheit zu bieten, stets auf die praktische Anwendung aufmerksam zu machen, andererseits, um dem Schüler wo möglich alle Mittel an die Hand zu geben, die Beispiele, welche in Sammlungen planimetrischer und stereometrischer Aufgaben niedergelegt sind, lösen zu können, dadurch sein Interesse für das Studium der Mathematik zu erhöhen, und dasselbe nicht nur zu einem Bildungsmittel des Verstandes, sondern auch zu einer Quelle des schönsten Vergnügens zu machen.

Augsburg, im März 1851.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei der vorliegenden neuen Auflage meiner Elementargeometrie, welche als Fortsetzung der Arithmetik die zweite Abtheilung meines Werkes „Elementar-Mathematik für Gymnasien" bildet, war ich vor Allem veranlaßt, nachdem das Buch durch höchste Entschließung des K. Staatsministeriums des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten vom 24. Oktober 1854 zur Einführung als Unterrichtsbuch an Gymnasien gebilligt wurde, dasselbe um einen kurzen Abriß der Trigonometrie zu vermehren, welche nach §. 62. der revidirten Schulordnung vom 24. Febr. 1854 als Unterrichtsgegenstand für die **IV.** Klasse des Gymnasiums mit aufgenommen ist. Nebst dieser Vermehrung des Buches war ich aber auch auf das sorgfältigste bemüht, dasselbe durchgängig zu überarbeiten, und in einer wesentlich verbesserten Gestalt an das Licht treten zu lassen, wovon man sich leicht durch einen vergleichenden Blick überzeugen kann, und worüber ich nur einige wenige Bemerkungen vorauszusenden habe.

Was zunächst die Planimetrie betrifft, so wurde im **I.** Abschnitte derselben eine veränderte Anordnung des Lehrstoffes in der Art getroffen, daß auch hier bei den einzelnen Kapiteln den theoretischen Sätzen die einschlägigen praktischen unmittelbar folgen, wodurch natürlich die Uebereinstimmung der Paragraphen, die ich außerdem wo möglich mit denen der ersten Auflage in Uebereinstimmung zu erhalten suchte, wegfallen mußte; jedoch ist die Anzahl derselben ungeändert geblieben. Ueberdieß erlitt die Theorie der Parallellinien einige, wie ich hoffe, für das leichtere Verständniß der Lernenden nicht unzweckmäßige Abänderungen. Den Erklärungen über die Längenmaße (§. 52.) habe ich eine Vergleichungstabelle der wichtigsten Maßeinheiten beigefügt, was für nicht unerwünscht erachtet wurde, und deßhalb auch bei den Flächen- und Körpermaßen geschehen ist (§§. 169. und 374.).

Hinsichtlich des **II.** Abschnittes wurde in der Lehre von den geradlinigen Figuren hauptsächlich darauf gesehen, den einzelnen Sätzen und Beweisen, ohne der Deutlichkeit Eintrag zu thun, eine kürzere Fassung und durch bloße Hinweisungen auf bereits behandelte Sätze oder auf mein Lehrbuch der Arithmetik Veranlassung zur steten Wiederholung zu geben. Manches minder Wichtige wurde weggelassen, mehrere Sätze anders gestellt, Beweise auf einfachere Weise geführt, Aufgaben auf andere Art gelöst rc.

Von den praktischen Sätzen über die Messung geradliniger Figuren sind einige Aufgaben durch andere für passender erachtete ersetzt worden. Den Anhang über die geometrische Construktion algebraischer Ausdrücke habe ich mich nicht entschließen können, fallen zu lassen, da er ja ohnehin sehr kurz behandelt ist, und solche Constructionen abgesehen davon, daß sie die Basis der analytischen Geometrie bilden, eine höchst nützliche und den Geist des Schülers angenehm beschäftigende Uebung gewähren, oder bei dem Unterrichte gleichwie andere minder wesentlich erscheinende Sätze übergangen oder dem Privatfleiße überlassen werden können.

Bedeutendere Aenderungen sind in der Lehre vom Kreise vorgenommen worden. Mehrere Sätze fielen ganz aus, oder wurden mit andern verbunden, neue wurden eingeschaltet, die Beweise durchgängig so viel als möglich abgekürzt; insbesondere sind in dem Kapitel über die regulären Figuren vielfache als zweckmäßig erscheinende Abänderungen, namentlich in Hinsicht auf die Seiten- und Flächenberechnungen getroffen worden. Als Anhang habe ich noch je zwei geometrische Auflösungen der Aufgabe über die Rektification und Quadratur des Kreises beigefügt, die für den Lernenden nicht ohne Interesse sein dürften.

In Bezug auf die **Stereometrie** wurde im **I.** Abschnitte außer der durchgängigen Abkürzung der Beweise

wesentliche Veränderungen nur sehr wenige vorgenommen; nur die Theorie des körperlichen Dreieckes mußte einige Sätze erweitert werden, welche die in das Werk mit aufgenommenen Anfangsgründe der sphärischen Trigonometrie erheischten.

In der Lehre von den geometrischen Körpern ist im Wesentlichen sehr wenig geändert worden, nur wurden die Beweise, wo möglich, abgekürzt, wenige auf andere Art geführt. Dagegen wurde das Kapitel über die Messung der Körper einer strengen Revision und vielfachen Verbesserungen und Vereinfachungen unterzogen. Den Anhang zur Stereometrie, welcher die Messung der regulären und einiger anderer Körper behandelt, habe ich nicht so sehr wegen ihrer Wichtigkeit, als deßhalb beigefügt, weil diese Sätze eine sehr nützliche Uebung im Calcul und in der Wiederholung früherer Sätze gewähren; und ich hoffe, daß diese Zugabe Manchem nicht unwillkommen sein werde, zumal, wenn nicht Mangel an Zeit der Durchnahme derselben entgegensteht.

Im ersten Abschnitte der Trigonometrie habe ich die Grundlehren der Goniometrie so kurz als möglich und nach derselben Methode behandelt, die ich in meinen Werkchen „Anfangsgründe der ebenen und sphärischen Trigonometrie und deren Anwendung auf die Lösung quadratischer

und kubischer Gleichungen nebst praktischen Beispielen aus der Geodäsie, Physik, Geographie und Astronomie, Augsburg, 1852" gewählt habe, da sie mir für das Verständniß der Lernenden am meisten zweckmäßig erscheint; überdieß habe ich von der unbegrenzten Anzahl der goniometrischen Formeln nur so viele aufgenommen, als zum genauern Verständnisse der eigentlichen Trigonometrie für nothwendig oder zweckdienlich erachtet wurden.

Im zweiten Abschnitte (Trigonometrie) habe ich jedesmal zuerst die Grundgleichungen zur Auflösung der Dreiecke aufgestellt, um dann in der Folge die Beweise größtentheils auf bloße Hinweisungen auf dieselben beschränken zu können. Formeln, welche Summen oder Differenzen enthalten, sind durchgängig in solche umgestaltet worden, die sich für logarithmische Berechnungen (ohne Anwendung der Gauß'schen Tafeln) eignen. Die der ebenen Trigonometrie als Anhang beigegebene Aufgabe über die Construktion eines regulären Vieleckes im Kreise ist in der Hauptsache den Elementen der Geometrie von J. H. van Swinden entnommen. Daß ich nebst der ebenen auch noch auf wenigen Blättern einen Abriß der sphärischen Trigonometrie aus mehreren Gründen, besonders aber deßhalb, weil ich ein Ganzes bieten wollte, beizufügen mich nicht enthalten konnte, wird hoffentlich von Sachverständigen beifällig aufgenommen werden.

Somit übergebe ich denn das Werkchen in seiner neuen Gestalt und, wie ich glaube, mit einer hinreichenden Quantität von Material versehen, der Oeffentlichkeit mit dem lebhaften Wunsche, daß es sich der nachsichtigen Beurtheilung meiner Herren Amtsgenossen zu erfreuen habe, und bei der studierenden Jugend jenen formellen und materiellen Nutzen erzwecken möge, auf welchen bei dessen Bearbeitung stets mein Augenmerk gerichtet war.

Augsburg, den 1. Mai 1855.

Der Verfasser.

Inhalt.

II. Theil. Stereometrie.

Berichtigungen.

Seite	45	Zeile	2	von unten	ist statt:	Zus.	zu lesen:		Zus. 1.
„	66	„	14	„ oben	„ „	Zus.	„	„	Zuss.
„	84	„	8	„ „	„ „	0·999261	„	„	0·099926
„	185	„	17	„ „	„ „	v	„	„	m
„	189	„	8	„ „	„ „	0.4	„	„	0·4.

Einleitung.

§. 1.

Die Geometrie (passender Raumgrößenlehre) ist die Wissenschaft von den im Raume ausgedehnten stetigen Größen, oder kurz die Wissenschaft des Raumes.

Der Name Geometrie (Γεωμετρία) kommt entweder daher, weil die Lehren dieser Wissenschaft anfänglich nur auf Vermessungen auf der Erdoberfläche angewendet wurden, oder weil diese Veranlassung zur Erfindung der Wissenschaft waren.

§. 2.

1. Unter Raum versteht man die allgemeine Form, unter welcher alle Gegenstände einer wirklichen oder bloß möglichen äußern (sinnlichen) Wahrnehmung erscheinen.

2. Eine Größe heißt ausgedehnt= (oder extensiv=) stetig, wenn ihre Theile außerhalb einander liegen und in ununterbrochenem Zusammenhange stehen.

Der Raum ist von den physischen Gegenständen in ihm ganz verschieden. Diese erscheinen darin nur als etwas Zufälliges, das man in Gedanken aus ihm wegnehmen kann. Sie können zwar, ihrer Ausdehnung wegen, einer geometrischen Betrachtung unterstellt werden, dabei finden dann aber nur ihre Größe und Gestalt Berücksichtigung, mit ihren physischen Eigenschaften und Merkmalen, z. B. ihrer Materie, Schwere, Farbe, u. s. w., hat die Geometrie nichts zu thun.

§. 3.

Der geometrische (absolute) Raum ist unendlich, d. h. nach allen Seiten hin unbegrenzt, muß jedoch allenthalben beliebig begrenzbar, mithin in's Unendliche theilbar gedacht werden, und ist daher einer mathematischen Betrachtung fähig.

§. 4.

1. Die Zahl, welche angibt, nach wie vielen verschiedenen Richtungen eine stetige Größe ausgedehnt ist, nennt man eine Abmessung oder Dimension.

2. Der Raum hat drei Dimensionen, welche man durch die Benennungen: Länge, Breite und Höhe (auch Tiefe oder Dicke) unterscheidet.

Länge, Breite und Höhe bezeichnen nicht bestimmte Richtungen der Ausdehnung, sondern nur die Verschiedenheit derselben überhaupt, lassen sich also beliebig vertauschen.

§. 5.

Eine Raumgröße heißt hinsichtlich ihrer Dimensionen

1) eine geometrische Linie, wenn sie nur eine Ausdehnung hat, die stets mit dem Namen „Länge" bezeichnet wird,

2) eine geometrische Fläche, wenn sie nach zwei Dimensionen „Länge und Breite" ausgedehnt ist,

3) ein geometrischer Körper, wenn sie alle drei Dimensionen enthält.

§. 6.

1. Das Aeußerste einer Größe, oder dasjenige, womit sie aufhört zu sein, was sie bisher war, heißt eine Grenze derselben.

2. Die Grenzen eines Körpers sind Flächen; denn da hier die körperliche Ausdehnung aufhört, so können sie keine Körper mehr sein, also auch keine Dicke mehr haben. Die Grenzen einer Fläche können keine Breite mehr haben, sind also Linien. — Die Grenzen der Linien müssen ohne alle Ausdehnung sein; man nennt sie mathematische Punkte.

Der mathematische Punkt ist das absolut Einfache und Untheilbare, das Aufhören alles Ausgedehnten im Raume, er bezeichnet nur eine Stelle in ihm, ohne ein Theil desselben zu sein.

§. 7.

Da die Grenzen eines Dinges nicht Bestandtheile desselben sind, so besteht ein Körper nicht aus Flächen, diese nicht aus Linien, und die Linien nicht aus Punkten; sondern der Körper aus Körpern, die Fläche aus Flächen, die Linie aus Linien; wohl aber lassen sich (wegen der Stetigkeit des Raumes) in jedem Körper

Flächen, in jeder Fläche Linien, in jeder Linie Punkte annehmen, so viele man will.

§. 8.

1. Das Object (Gegenstand) der Geometrie sind also Linien, Flächen und Körper als räumlich ausgedehnte, stetige und in's Unendliche theilbare Größen, in so ferne sich ihre Eigenschaften und Beziehungen einer mathematischen Behandlung unterwerfen lassen.

2. Der Punkt kann als das absolut Einfache und Untheilbare für sich nicht Gegenstand geometrischer Betrachtung sein, wohl aber in Verbindung mit andern Raumformen oder Punkten.

§. 9.

1. Der Vortrag und die Begründung der Lehren der Geometrie geschieht wie in der Mathematik überhaupt, durch Erklärungen, Sätze und Beweise. (Vgl. Allgem. Einl. 10—13.)

2. Zur Führung geometrischer Beweise ist oft die Verzeichnung von Linien, Flächen und Körpern nöthig, welche man, da sie den Beweis vermitteln, Hilfslinien, =Flächen, =Körper nennt.

3. Jede bildliche Darstellung von Raumgrößen nennt man eine Figur, und ihre Verzeichnung überhaupt, sowie auch die von Hilfslinien u. s. w. die Construktion derselben. Erfordert die Verzeichnung einer Figur keine andern Hilfsmittel, als Lineal und Zirkel, dann wird sie geometrische Construktion genannt.

§. 10.

Räumlich ausgedehnte Größen heißen auf einander bezogen

1) gleich, wenn sie gleiche Quantität haben, d. h. wenn sie aus gleich vielen homogenen Theilen bestehen;

2) ähnlich, wenn sie einerlei Qualität, d. i. gleiche Gestalt oder Form haben, ohne gleich groß zu sein;

3) congruent, wenn sie in Quantität und Qualität, also vollkommen übereinstimmen, und sich so auf oder ineinander gelegt denken lassen, daß die Grenzen der einen auf die der andern fallen.

Die Gleichheit räumlicher Größen wird durch das Zeichen „$=$", ihre Aehnlichkeit durch „$\sim$", ihre Congruenz durch „$\cong$" angedeutet, welches zwischen die Bezeichnungen der Größen selbst gesetzt wird.

§. 11.

1. Man sagt eine extensive Größe sei gegeben oder bestimmt, wenn für bestimmte Stücke in jeder beliebigen Lage nur eine einzige Größe derselben Art möglich ist.

2. Ist eine Größe durch gewisse Stücke gegeben, so sind alle Größen derselben Art, die mit den nämlichen Bestimmungsstücken auf gleiche Weise construirt werden, congruent.

§. 12.

1. Eine Raumgröße messen heißt untersuchen, wie oft eine bekannte Größe derselben Art in ihr enthalten sei, oder ihr Verhältniß zu der letztern in Zahlen bestimmen.

2. Die bekannte Größe mittelst der eine andere gemessen wird, heißt die Einheit oder das Maß, und die Zahl, welche man durch das Messen findet, wird die Maßzahl genannt.

§. 13.

Die Geometrie wird nach dreifachem Gesichtspunkte eingetheilt:

A. hinsichtlich ihres Objectes in zwei Haupttheile, nämlich

1) in die Planimetrie oder ebene Geometrie (auch Epipedometrie), d. i. die Lehre von den Linien und Flächen;

2) in die Stereometrie oder körperliche Geometrie, d. i. die Lehre von den geometrischen Körpern. An beide schließt sich an

3) die Trigonometrie, welche eine Verbindung der Arithmetik und Geometrie ist, und durch Rechnung finden lehrt, was bei jenen durch Construktion gefunden wird.

B. In Hinsicht auf den Umfang ihrer Untersuchungen

1) in die niedere oder Elementargeometrie, welche nur die einfachsten Linien, Flächen und Körper behandelt;

2) in die höhere (analytische), welche alle weitern Arten von Linien, Flächen und Körpern betrachtet.

C. Außerdem theilt man sie noch in die theoretische und praktische, je nachdem bloß die Eigenschaften der Raumgrößen an und für sich, oder wirklich vorhandener Größen untersucht werden.

Anm. In Hinsicht auf das Object sollte man die Geometrie eigentlich in drei Theile, nämlich in die Lehre von den Linien (Longimetrie), dann in die von den Flächen und Körpern theilen; da jedoch die Linien für sich zu wenig Stoff darbieten, so ist die oben gewählte Eintheilung die gewöhnliche.

I. Theil. Planimetrie.

I. Abschnitt. Von den Linien und Winkeln.

I. Kap. Von den Linien.

§. 14.

Erkl. 1. Eine geometrische Linie ist jene Raumgröße, welche nur eine Dimension hat, also nur nach ihrer Ausdehnung in die Länge betrachtet, und von Punkten begrenzt wird (vgl. §. 5, 1. und §. 6, 2.).

Man kann sich eine Linie entstehend denken durch die Fortbewegung eines Punktes im Raume mit Zurücklassung von Spuren seiner Bewegung. Die ursprüngliche Lage des Punktes heißt der Anfangspunkt, die Stelle, an der er gleichsam stehen bleibt, der Endpunkt, und der gemachte Weg die Richtung der Linie. —

2. Berücksichtigt man an einer begrenzten (oder endlichen) Linie nur die Größe ihrer Ausdehnung, d. i. ihre Länge, und nicht auch die Art ihrer Entstehung, so nennt man beide Grenzpunkte derselben ihre Endpunkte.

Eine begrenzte Linie wird durch zwei an ihre Endpunkte geschriebene Buchstaben bezeichnet, z. B. (Fig. 1.): AB oder BA.

3. Nimmt man in einer Linie einen Punkt an, so wird sie durch denselben in zwei Theile getheilt, welche man Abschnitte oder Segmente der Linie, oder auch die Seiten jenes Punktes nennt.

Zus. Linien sind Größen, und daher einer mathematischen Behandlung fähig. Denn sind zwei (oder mehrere) Linien so aneinander gelegt, daß sie nur eine einzige ausmachen, so stellt diese letztere die Summe der einzelnen Linien vor; so ist z. B. (Fig. 1.): $AB = AC + CB$. — Ebenso kann man jedes Stück der Linie AB als eine Differenz betrachten zwischen der ganzen Linie und dem andern Stücke; d. h. es ist z. B. $AC = AB - BC$. — Denkt man sich die beiden Theile der Linie AB gleich groß, nämlich

AC = BC, so ist AB = 2. AC, und umgekehrt AC = BC = $\frac{1}{2}$ AB, und man sagt im erstern Falle die Linie AC sei verdoppelt, im letztern, AB sei in C halbirt.

§. 15.

Erkl. Hinsichtlich ihrer Richtung heißt eine Linie

1) gerade (Linea recta), gewöhnlich kurz eine Gerade genannt, wenn alle ihre Theile einerlei Richtung haben (Fig. 1.);

2) krumm oder eine Kurve, wenn sich ihre Richtung stets (stetig) ändert, also kein Theil gerade ist (Fig. 2);

3) gebrochen, wenn sie, ohne selbst eine Gerade zu sein, aus lauter geraden Theilen besteht (Fig. 3);

4) gemischt, wenn sie aus geraden und krummen Bestandtheilen zusammengesetzt ist (Fig. 4.).

Zus. 1. Es gibt nur eine Art gerader, dagegen unzählige Arten krummer und gebrochener Linien.

Zus. 2. Jeder Theil einer geraden Linie ist wieder eine Gerade.

a) Theoretische Sätze.

§. 16.

Grundſ. Zwischen zwei Punkten ist nur eine einzige Gerade, dagegen unendlich viele krumme und gebrochene Linien möglich.

Zus. 1. Durch zwei Punkte ist also eine gerade Linie (der Lage nach) sammt ihrer Verlängerung in's Unendliche gegeben.

Zus. 2. Zwischen zwei gegebenen Punkten ist die gerade Linie die kürzeste.

Zus. 3. Haben zwei Gerade zwei Punkte gemeinschaftlich, so bilden sie (in's Unendliche verlängert) nur eine einzige (Zus. 1.).

Zus. 4. Zwei Gerade können also, wenn sie verschiedene Linien bleiben sollen, nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, also auch keinen Raum einschließen.

§. 17.

Erkl. Die kürzeste Linie (das Längenminimum) zwischen zwei Gegenständen nennt man ihre Entfernung, Distanz oder ihren Abstand von einander.

Zus. Die Entfernung zweier Punkte ist also die gerade Linie zwischen denselben.

§. 18.

Lehrs. Gleiche gerade Linien sind congruent, d. h. sie müssen, gehörig auf einander gelegt, sich decken.

Dat. AB = CD. — Thes. AB ≅ CD. (Fig. 5.)

Bew. Denkt man sich die Linie AB so auf CD gelegt, daß der Punkt A auf C, und die Linie AB in die Richtung der Linie CD kommt, so müssen auch die Endpunkte B und D zusammenfallen, also beide Linien sich decken. Denn fiele der Punkt B nicht auf D, so könnte er nur zwischen C und D, oder über D hinausfallen; im ersten Falle wäre dann aber AB nur ein Theil von CD, mithin AB < CD, im zweiten wäre aus demselben Grunde CD < AB, was beides gegen die Voraussetzung AB = CD streitet.

Da aus der Gleichheit zweier gerader Linien ihre Congruenz folgt, so bedient man sich bei denselben stets nur des Ausdruckes und Zeichens der Gleichheit.

Zus. 1. Eine gerade Linie ist durch ihre beiden Endpunkte vollkommen, d. i. ihrer Größe und Lage nach bestimmt (vgl. §. 16, Zus. 1.).

Zus. 2. Werden zwei ungleiche gerade Linien so auf einander gelegt, daß ihre Anfangspunkte zusammenfallen, so fällt der Endpunkt der kleinern zwischen die beiden Endpunkte der größern; es läßt sich mithin jede kleinere Linie auf einer größern abtragen.

§. 19.

Erkl. 1. Eine geometrische Fläche ist jene Raumform, welche zwei Dimensionen hat, nämlich Länge und Breite, oder nur nach diesen Ausdehnungen betrachtet wird.

2. Eine Fläche heißt eben oder eine Ebene (Planum), wenn in derselben nach allen Seiten hin gerade Linien gezogen werden können; dagegen krumm, uneben oder gebogen, wenn dieses entweder nur nach gewissen, oder nach keiner Seite hin geschehen kann.

3. Jede in einer Ebene liegende Linie theilt diese Ebene in zwei Theile, welche man die Seiten der Linie nennt.

Anm. Alle Untersuchungen der Planimetrie erstrecken sich nur auf solche Raumgrößen, die in ein und derselben Ebene liegen.

§. 20.

Erkl. 1. Von zwei geraden Linien, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben, sagt man, sie stoßen zusammen, oder

treffen sich in ihm, z. B. AB und CD (Fig. 6.); geht aber die eine durch die andere hindurch z. B. AB und EF, so schneiden sie sich, und in diesem Falle nennt man jede eine Sekante der andern, und den beiden gemeinschaftlichen Punkt (G) ihren Durchschnittspunkt.

2. Trifft oder schneidet eine gerade Linie eine andere so, daß sie sich auf keine Seite der letztern mehr als auf die andere neigt, so sagt man, sie stehe darauf senkrecht oder lothrecht (auch perpendiculär oder normal), und man nennt sie gegenseitig senkrechte Linien, z. B. CD und AB (Fig. 6.); außerdem stehen beide Linien auf einander schief, schräg oder sind gegeneinander geneigt, z. B. EG und AB.

Gewöhnlich nennt man von zwei auf einander senkrecht stehenden Linien kurz jede eine Senkrechte, ein Loth, eine Perpendikel oder eine Normale auf die andere, und bezeichnet dieses durch das Zeichen „⊥", welches durch „steht (oder ist) senkrecht auf" übersetzt wird. Daß eine Linie auf einer andern „schief stehe", soll in der Folge durch das Zeichen „/̲" angedeutet werden.

Anm. Im gewöhnlichen Leben werden senkrechte Linien vorzugsweise solche genannt, welche die Richtung eines freihängenden Fadens haben, der mit einem Gewichte (Loth) beschwert ist; die darauf senkrechte Linie, welche die Richtung einer ruhig stehenden kleinern Wasserfläche hat, heißt wagerecht oder horizontal.

§. 21.

Erkl. 1. Eine in sich selbst zurückkehrende Linie (Fig. 7.), welche überall gleichweit von einem bestimmten in der von ihr eingeschlossenen Fläche liegenden Punkte entfernt ist, heißt Kreislinie oder (gewöhnlich kürzer ausgedrückt) Kreis *).

Ein Kreis entsteht dadurch, daß eine gerade Linie in einer Ebene so lange um einen ihrer Endpunkte herumgeführt wird, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt.

2. Der Punkt (C), von welchem die Kreislinie überall gleich weit absteht, heißt Mittelpunkt (Centrum) des Kreises; jeder Theil der Kreislinie selbst ein Bogen (arcus), z. B. AFB, wel-

---

*) Eigentlich ist Kreis die von der Kreislinie eingeschlossene Fläche (vgl. §. 201, 1.); da man es aber in der Geometrie bei weitem öfter mit der Kreislinie, als mit der Kreisfläche zu thun hat, so kann die nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche angenommene, bequemere Benennung Kreis wohl beibehalten werden.

cher wieder insbesondere Halbkreis genannt wird, wenn er die Hälfte; Quadrant, wenn er den vierten; Sextant, wenn er den sechsten Theil der Kreislinie beträgt.

3. Jede Gerade vom Mittelpunkte an irgend einen Punkt der Kreislinie, z. B. CD oder CE heißt ein Halbmesser oder Radius; jede Gerade, welche irgend zwei Punkte der Kreislinie (die Endpunkte eines Bogens) verbindet, z. B. AB, wird eine Sehne (chorda), und wenn sie durch den Mittelpunkt geht, z. B. DE, ein Durchmesser oder Diameter genannt.

4. Die Krümmung der Kreislinie von innen nach außen angesehen, nennt man hohl (concav), von außen nach innen betrachtet erhaben (convex).

Die Kreislinie ist nebst ihren Theilen die einzige krumme Linie, welche in der Elementargeometrie betrachtet wird.

Zus. 1. Alle Radien ein und desselben Kreises sind einander gleich (Erkl. 1. und §. 18, Zus. 1.).

Zus. 2. Jeder Diameter ist der Summe zweier Radien (dem doppelten Radius) gleich; daher sind auch alle Durchmesser gleich.

Zus. 3. Die Entfernung eines Punktes vom Mittelpunkte ist kleiner oder größer als der Radius, je nachdem der Punkt inner- oder außerhalb des Kreises liegt, und umgekehrt.

§. 22.

Lehrs. Jeder Diameter theilt den Kreis in zwei (vollkommen) gleiche Theile (Halbkreise).

Dat. DE ist ein Diameter (Fig. 7.).

Thes. arc. DFE = arc. DGE.

Bew. Offenbar wird durch den Diameter DE die Kreislinie sowohl als auch die davon eingeschlossene Fläche in zwei Theile getheilt. Denkt man sich nun den ganzen Kreis um den Diameter DE so gefaltet, daß z. B. der untere Theil auf den obern zu liegen kommt, so fällt auch der Bogen DFE auf den Bogen DGE. Denn fiele arc. DFE etwa in die Richtung DHE, so müßte, wenn man einen beliebigen Radius CG zieht, CH = CG sein (§. 21, Zus. 1.), was offenbar nicht der Fall ist. Es fallen somit die beiden Bogen aufeinander, sind alle vollkommen gleich.

Zus. Jede Sehne AB, welche kein Diameter ist, theilt den Kreis in zwei ungleiche Theile.

b) Praktische Sätze.

§. 23.

Postulate. Es kann als etwas unter allen Umständen Mögliches gefordert werden:

I. Zwischen zwei gegebenen Punkten eine gerade Linie zu ziehen (oder dieselben durch eine Gerade zu verbinden);

II. Eine gegebene Gerade zu verlängern, entweder über einen oder beide Endpunkte hinaus, oder so, daß sie einer andern (gegebenen) Geraden gleich wird;

III. Von einer gegebenen Geraden ein Stück von bestimmter Länge abzuschneiden;

IV. Um einen gegebenen Punkt mit gegebenem Radius einen Kreis oder einen Bogen zu beschreiben.

Anm. Auf diese vier Postulate stützen sich die Auflösungen aller geometrischen Aufgaben, und es wird dazu nur der richtige Gebrauch eines Lineals und Zirkels erfordert. (Vgl. §. 9, 3.)

§. 24.

Aufg. Eine gebrochene Linie zu rektifiziren, d. h. in eine gleich lange gerade Linie zu verwandeln.

Aufl. Man ziehe eine beliebige Gerade MN (Fig. 8.) von hinreichender Länge, fasse die einzelnen Stücke der gegebenen gebrochenen Linie nach und nach in den Zirkel, und trage dieselben dadurch nach einander auf MN auf, daß man aus M als Mittelpunkt mit dem Radius AB einen kleinen Bogen beschreibt, der MN in F schneidet, dann von F aus mit dem Radius BC u. s. f.; so ist das Verlangte geschehen.

Bew. Es ist der Construktion gemäß

$$\left.\begin{array}{l} MF = AB \\ FG = BC \\ GH = CD \end{array}\right\} \text{(§. 18, Zus. 1.); daher auch}$$

$$MF + FG + GH = AB + BC + CD, \text{ d. i.}$$

$$MH = AB + BC + CD.$$

Zus. Auf gleiche Weise läßt sich auch eine gegebene Gerade verdoppeln, überhaupt das n-fache derselben construiren; ferner mehrere Gerade in eine verwandeln.

§. 25.

Aufg. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier gerader Linien zu finden, und ihr Verhältniß zu einander anzugeben.

Aufl. und Bew. Man trage die kleinere Linie AB (Fig. 9.) so oft auf der größern CD ab, als es angeht, z. B. (in der Figur) zweimal. Bliebe kein Rest, so wäre AB selbst das gemeinschaftliche Maß, und $CD = 2AB$; daher auch (Arithm. §. 256, Zus. 2.):

$$AB \div CD = AB \div 2AB = 1 \div 2.$$

Bleibt aber ein Rest FD, so trage man diesen wieder so oft als möglich auf AB ab, z. B. (in der Figur) dreimal. Bliebe hier kein Rest, so wäre FD das gemeinschaftliche Maß für AB und CD; denn es wäre dann $AB = 3.FD$; ferner

$$CD = 2AB + FD = 6.FD + FD = 7.FD.$$

Aus den Gleichungen $AB = 3.FD$ und $CD = 7.FD$ folgt wieder

$$AB \div CD = 3FD \div 7FD = 3 \div 7.$$

Bleibt aber ein Rest GB, so untersuche man wieder, wie oft sich dieser auf DF abtragen läßt. Ist dieß genau dreimal der Fall, so ist GB das größte gemeinsame Maß von AB und CD; denn man hat jetzt

$$FD = 3GB, \text{ ferner wird}$$

$$AB = 3FD + GB = 9.GB + GB = 10GB; \text{ dann}$$

$$CD = 2AB + FD = 20GB + 3GB = 23GB.$$

Es ist also sowohl AB als CD ein Vielfaches von GB; mithin GB ein Maß von AB und CD. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt ferner

$$AB \div CD = 10GB \div 23GB = 10 \div 23.$$

Bliebe beim Abtragen der Linie GB auf FD wieder ein Rest, so verfährt man mit ihm auf ähnliche Art, und so fort, bis endlich keiner mehr übrig bleibt. Der zuletzt gebliebene Rest ist dann das gesuchte gemeinschaftliche Maß beider Linien, woraus sich sofort auch ihr Verhältniß bestimmen läßt, das in diesem Falle rational oder commensurabel heißt.

Haben die Linien AB und CD kein gemeinschaftliches Maß, bleibt also, wie lange man auch obiges Verfahren fortsetzen mag, stets wieder ein Rest; dann läßt sich auch ihr Verhältniß nicht vollkommen genau bestimmen, und heißt dann irrational oder in-

commensurabel. Es ist jedoch nach dem gegebenen Verfahren möglich, dem wahren Verhältnisse sich zu nähern, so weit man nur immer will.

Zus. 1. Linien verhalten sich wie ihre Maßzahlen, d. h. wie die Zahlen, welche angeben, wie oft ein gemeinschaftliches Maß in ihnen enthalten ist.

Zus. 2. Linienverhältnisse, die demselben Zahlenverhältnisse gleich sind, bilden eine Proportion, und es gelten für sie dieselben Gesetze, welche die Arithmetik über Verhältnisse und Proportionen von Zahlen lehrt.

II. Kap. Von den Winkeln.

§. 26.

Erkl. 1. Unter einem Winkel versteht man die Abweichung der Richtungen zweier von einem Punkte ausgehender Linien (oder auch den unbegrenzten Flächenraum zwischen zwei in einem Punkte zusammenstoßenden Linien).

Die beiden, einen Winkel einschließenden Linien werden die Schenkel, und der ihnen gemeinschaftliche Punkt der Scheitel oder die Spitze des Winkels genannt.

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch drei Buchstaben, wovon einer an die Spitze, die andern an beliebige Punkte der beiden Schenkel gesetzt werden, oder durch einen zwischen die Schenkel nahe am Scheitel geschriebenen kleinen Buchstaben, oder endlich bloß durch einen Buchstaben am Scheitel, und setzt diesen Bezeichnungen gewöhnlich noch das Zeichen „$\measuredangle$“, (das mit „Winkel“ übersetzt wird) voran. — Bei der Bezeichnung durch drei Buchstaben muß stets der am Scheitel stehende in der Mitte gelesen werden. Demnach haben wir also z. B. (Fig. 10.): $\measuredangle$ ABC oder CBA, oder $\measuredangle \alpha$, oder $\measuredangle$ B.

2. Nach der Beschaffenheit seiner Schenkel heißt ein Winkel a) geradlinig, wenn seine beiden Schenkel gerade, b) krummlinig, wenn sie krumme Linien sind, c) gemischtlinig, wenn der eine Schenkel eine gerade, der andere eine krumme Linie ist.

In der Planimetrie kommen nur geradlinige Winkel in Betracht, die man sich sämmtlich durch die Drehung einer geraden Linie um einen ihrer Endpunkte entstehend denken kann.

Zus. 1. Die Größe eines Winkels hängt nur von der Abweichung seiner Schenkel, nicht aber von deren Länge ab; denn es ist offenbar (Fig. 11.) CBD und EBF derselbe Winkel.

Zus. 2. Ein Winkel ist um so größer, je mehr seine Schenkel von einander abweichen; denn da ∡ CBD nur ein Theil von ABD ist, so ist ∡ ABD > CBD.

Zus. 3. Winkel sind also Größen, daher ein Gegenstand mathematischer Betrachtung.

§. 27.

Erkl. Ein (geradliniger) Winkel heißt

1) ein gerader (gestreckter oder flacher), wenn seine beiden Schenkel in einer geraden Linie liegen, z. B. ∡ ACB (Fig. 1.);

Man pflegt einen flachen Winkel mit dem Buchstaben π zu bezeichnen, so daß der Ausdruck ∡ ACB $= \pi$ sagt: „Der Winkel ACB ist ein gerader.

2) ein hohler (oder concaver), wenn er kleiner ist als ein gerader, so daß die Verlängerung von einem der beiden Schenkel über den Scheitel hinaus außerhalb die zwischen den Schenkeln des Winkels liegende Ebene fällt, z. B. ACD oder AGE (Fig. 6.);

3) ein erhabener (oder convexer), wenn er größer ist als ein gerader, so daß jene Verlängerung zwischen die Schenkel, also in die Winkelfläche hineinfällt.

Anm. Unter Winkel überhaupt (ohne besondern Beisatz) wird stets der hohle verstanden.

§. 28.

Erkl. Nach der Lage seiner Schenkel heißt ein hohler Winkel:

1) ein rechter, kurz ein Rechter, wenn seine beiden Schenkel auf einander senkrecht stehen, z. B. ACD und DCB (Fig. 12.); außerdem wird er

2) ein schiefer genannt, und zwar insbesondere

a) ein spitzer, wenn er kleiner ist als ein rechter, z. B. BCE;

b) ein stumpfer, wenn er größer ist als ein rechter, z. B. ACE.

Man bezeichnet den rechten Winkel gewöhnlich mit R, indem man z. B. statt „∡ ACD ist ein Rechter" schreibt: ∡ ACD = R.

3) Alle spitzen und ebenso alle stumpfen Winkel werden in Beziehung aufeinander auch gleichnamig, ein spitzer und ein stumpfer dagegen ungleichnamig genannt.

§. 29.

Erkl. 1. Zwei Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich haben, nennt man anstoßende Winkel, z. B. ∡ ABC und CBD (Fig. 11.).

2. Zwei anstoßende Winkel, deren andere (nicht gemeinsame) Schenkel in einer geraden Linie liegen, werden Nebenwinkel genannt, z. B. ACE und ECB (Fig. 12.).

3. Zwei Winkel, bei welchen die Schenkel des einen die über den Scheitel hinaus verlängerten Schenkel des andern sind, nennt man Vertikal- oder Scheitelwinkel. Solche sind x und y (Fig. 13.), ebenso m und n.

Zus. Jeder von zwei gleichen Nebenwinkeln ist ein Rechter. Denn ist (Fig. 12.) ∡ ACD = DCB, so hat DC gleiche Neigung gegen AC und BC, steht also auf AB senkrecht (§. 20. 2.); und daher ist sowohl ∡ ACD als DCB = R (§. 28, 1.).

a) Theoretische Sätze.

§. 30.

Lehrs. Gleiche Winkel sind congruent.

Dat. ∡ ABC = DEF. — Thes. ∡ ABC ≅ DEF (Fig. 14.).

Bew. Denkt man sich den ∡ ABC so auf DEF gelegt, daß der Punkt B auf E, und der Schenkel BC auf EF zu liegen kommt, so muß auch BA auf ED fallen. Denn wäre diese Behauptung unrichtig, so könnte BA nur zwischen ED und EF (etwa in die Richtung EG), oder über ED hinausfallen. Im ersten Falle wäre dann aber ∡ ABC (der in seiner Lage auf DEF durch ∡ GEF vorgestellt ist) nur ein Theil von ∡ DEF, mithin ∡ ABC < DEF; im andern Falle wäre als Theil ∡ DEF < ABC, was beides gegen die Voraussetzung, ∡ ABC = DEF, ist. Also fällt BA auf ED, beide Winkel decken sich, sind somit congruent.

Die Bem. zu §. 18, Lehrs., gilt auch für Winkel, d. h. man bedient sich auch bei diesen nur des Zeichens der Gleichheit.

Zus. Legt man zwei ungleiche Winkel so aufeinander, daß die Scheitel und zwei Schenkel sich decken, so fällt der andere Schenkel des kleinern zwischen die beiden Schenkel des größern Winkels.

§. 31.

Lehrs. In einem Punkte einer geraden Linie ist auf einerlei Seite derselben nur eine einzige Senkrechte möglich.

Dat. $CD \perp AB$. — Thes. $CE \not\perp AB$ (Fig. 12.).

Bew. Da (nach der Voraussetzung) $CD \perp AB$, so ist $\measuredangle ACD = R$. Wäre nun auch $CE \perp AB$, so müßte aus demselben Grunde $\measuredangle ACE = R$; mithin $\measuredangle ACE = ACD$ sein. Es ist aber offenbar $\measuredangle ACD < ACE$; folglich kann CE nicht senkrecht auf AB stehen, und es ist daher $CE \not\perp AB$.

Zus. 1. Alle rechten Winkel sind einander gleich. Denn denkt man sich dieselben so auf einandergelegt, daß ihre Scheitel und ein paar Schenkel sich decken, so müssen auch die beiden andern Schenkel zusammenfallen, weil sonst zwei Senkrechte in einem Punkte vorhanden wären, was unmöglich ist (Lehrs.).

Zus. 2. Der rechte Winkel hat also eine unveränderliche (constante) Größe.

§. 32.

Lehrs. Jede zwei Nebenwinkel sind zusammengenommen gleich zwei Rechten.

Dat. ACE und BCE sind Nebenwinkel (Fig. 12.).

Thes. $ACE + BCE = 2R$.

Bew. Denkt man sich in dem Punkte C die Linie $CD \perp AB$, so ist $\measuredangle ACD = BCD = R$ (§. 29, Zus.), mithin $ACD + BCD = 2R$. Nun ist aber

$$\measuredangle ACE = ACD + DCE, \text{ und}$$
$$\measuredangle BCE = BCD - DCE; \text{ mithin}$$
$$\measuredangle ACE + BCE = ACD + BCD = 2R.$$

Zus. 1. Ist einer von zwei Nebenwinkeln ein Rechter, so ist es auch der andere. Steht daher eine Gerade auf einer andern senkrecht, so ist auch ihre Verlängerung darauf senkrecht.

Zus. 2. Jeder gerade Winkel ist eine Summe zweier Nebenwinkel, mithin gleich zwei Rechten, oder es ist $\pi = 2R$; folglich auch $R = \frac{1}{2}\pi$.

Zus. 3. Sind zwei Winkel einander gleich, so sind es auch ihre Nebenwinkel.

Zus. 4. Alle Winkel um einen Punkt auf einerlei Seite einer Geraden betragen zusammen 2R; denn man kann sie betrachten als Theile zweier Nebenwinkel oder eines geraden Winkels.

Zus. 5. Alle Winkel (der ganze Flächenraum) rings um einen Punkt betragen 4R, als zwei Paare von Nebenwinkeln.

§. 33.

Lehrs. Sind zwei Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich haben, zusammen gleich 2R, so sind sie Nebenwinkel, d. h. ihre beiden andern Schenkel liegen in einer geraden Linie.

Dat. $\measuredangle ACB + BCD = 2R$ (Fig. 15.).

Thes. ACB und BCD sind Nebenwinkel.

Bew. Wäre CD nicht die Verlängerung von AC, so könnte dieselbe nur entweder über CD, etwa in die Richtung CE, oder unterhalb CD, etwa in CF fallen. Beides ist unmöglich; denn im ersten Falle wäre dann

$\measuredangle ACB + BCE = 2R$ (§. 32); nun ist aber

$\measuredangle ACB + BCD = 2R$ (Dat.). Es müßte also

$\measuredangle ACB + BCE = ACB + BCD$; mithin

$\measuredangle BCE = BCD$

sein, was offenbar nicht der Fall ist. Auf dieselbe Ungereimtheit führt die Annahme, die Verlängerung von AC falle in CF; daher ist CD selbst die Verlängerung von AC, und die Winkel ACB und BCD sind Nebenwinkel (§. 29, 2.).

Zus. Jede zwei Winkel, deren Summe gleich zwei Rechten ist, lassen sich als Nebenwinkel betrachten.

§. 34.

Erkl. Ein Winkel, welcher einen andern zu einem Rechten ergänzt, wird das Complement desselben, ergänzt er ihn zu zwei Rechten, sein Supplement genannt. Der ergänzte Winkel heißt im ersten Falle der complirte, im zweiten der supplirte.

Zus. 1. Jeder von zwei Nebenwinkeln ist das Supplement des andern.

Zus. 2. Durch die Größe eines Winkels (m) ist auch die seines Complementes (x) und seines Supplementes (y) bestimmt, und umgekehrt; denn da die Summe beider bekannt ist, so wird

I) $x = R - m$, und II) $y = 2R - m$.

Zus. 3. Gleiche Winkel haben gleiche Complemente und gleiche Supplemente.

§. 35.

Lehrs. Jede zwei Vertikalwinkel sind einander gleich.

Dat. m und n; x und y (Fig. 13.) sind Scheitelwinkel.

Thes. m = n, und x = y.

Bew. Die Winkel m und n haben x (oder y) als gemeinschaftliches Supplement, daher ist sowohl m = 2R — x, als auch n = 2R — x (§. 34, Zus. 2.); also m = n.

Ebenso ergibt sich x = y = 2R — m.

Zus. 1. Ist von den vier Winkeln zweier sich schneidender Linien einer gegeben, so sind alle vier bekannt.

Zus. 2. Ist von den obengenannten vier Winkeln einer ein rechter, so sind alle vier rechte.

+§. 36.

Lehrs. Werden zwischen den Schenkeln zweier gleicher Winkel aus deren Scheiteln mit einerlei Radius Kreisbogen beschrieben, so sind sowohl I. diese Bogen, als auch II. die zu ihnen gehörigen Sehnen gleich.

Dat. ∡m = n und BC = EF (Fig. 16.).

Thes. I. arc. AC = arc. DF. — II. chord. AC = ch. DF.

Bew. Legt man (in Gedanken) den Winkel m so auf ∡n, daß der Punkt B auf E und BC auf EF fällt, so muß auch BA auf ED kommen (§. 30.); es muß aber auch C auf F, und A auf D (§. 18. und §. 21, Zus. 1.), folglich auch die Sehne AC auf DF (§. 16, ~~Zus. 3.~~), und der Bogen AC auf den Bogen DF fallen, weil alle Punkte beider Bogen gleichweit von den aufeinander gelegten Mittelpunkten entfernt sind.

Zus. 1. Sind zwei Winkel ungleich, so sind es auch die zwischen ihren Schenkeln mit gleichem Radius beschriebenen Bogen, und zwar gehört zum größern Winkel der größere Bogen (vergl. §. 30, Zus.)

Zus. 2. Sind zwei mit gleichen Radien zwischen den Schenkeln zweier Winkel beschriebene Bogen einander gleich, so sind auch die Winkel gleich, d. i. wenn arc AC = arc DF, und BC = EF ist, so ist auch ∡m = n. Denn wäre die Behauptung nicht richtig,

so könnte nur $\angle m \gtreqless n$ sein, was aber beides (vermöge Zus. 1.) auf einen Widerspruch mit der Voraussetzung führt.

Zus. 3. Die Größe eines Winkels ist also durch den Kreisbogen bestimmt, der zwischen seinen Schenkeln (aus dem Scheitel) mit beliebigem Radius beschrieben wird.

§. 37.

Erkl. Werden zwei gerade Linien von einer dritten durchschnitten, so entstehen acht hohle Winkel, von denen je zwei (abgesehen von Neben- und Scheitelwinkeln) verschiedene Benennungen erhalten, je nachdem sie zwischen oder außerhalb der durchschnittenen Linien, auf einerlei oder verschiedenen Seiten der Sekante liegen; und zwar heißen (Fig. 17.):

1) p, q, v und x innere Winkel;
m, n, y und z äußere Winkel;

2) q und v p " x	innere	Gegenwinkel;
m " y n " z	äußere	
3) q und x p " v	innere	Wechselwinkel;
m " z n " y	äußere	
4) m und v n " x	q und y p " z	correspondirende Winkel.

Anm. Bisweilen unterscheidet man auch noch Querwinkel; solche sind z. B. x und m, ebenso q und z.

§. 38.

Lehrs. Werden zwei gerade Linien von einer dritten so durchschnitten, daß ein Paar Gegenwinkel zusammen $= 2R$ sind; so ist I. jedes Paar Gegenwinkel zusammen $= 2R$, II. jedes Paar Wechselwinkel, und III. jedes Paar correspondirender Winkel einander gleich.

Dat. $p + x = 2R$ (Fig. 17.).

Thes. I. $q + v = 2R$; II. $p = v$, und III. $p = z$.

Bew. I. Nehmen wir ein beliebiges Paar Gegenwinkel, z. B. q und v, so ist (nach §. 32.):

$$\begin{array}{r}p+q=2R, \text{ ebenso} \\ x+v=2R; \text{ daher auch} \\ \hline p+x+q+v=4R. \text{ Zieht man hievon} \\ p+x=2R \text{ (Dat.) ab, so folgt} \\ \hline q+v=2R.\end{array}$$

II. Es ist $p+x=2R$ (Dat.), ferner
$x+v=2R$ (§. 32.); daher auch
$p+x=x+v$; mithin $p=v$.

III. Wie im vorhergehenden Falle ist $p+x=2R=x+z$; folglich auch $p=z$.

Zus. Der Lehrsatz gilt für jeden Fall auch umgekehrt, und läßt sich ebenso leicht beweisen. Stellt man alle möglichen Fälle zusammen, so erhält man folgende 12 Gleichungen, von denen alle richtig sind, sobald e i n e als richtig vorausgesetzt wird:

1) $p+x=2R$	7) $n=y$
2) $q+v=2R$	8) $m=z$
3) $n+z=2R$	9) $p=z$
4) $m+y=2R$	10) $x=n$
5) $p=v$	11) $q=y$
6) $q=x$	12) $v=m$.

Soll z. B. die Gleichung 4) aus 9) bewiesen werden; so hat man zu zeigen, daß, wenn $p=z$ ist, auch $m+y=2R$ sei. — Nun ist $m=p$ (§. 35.), aber auch $z=p$ (Dat.), daher $m=z$; ferner ist $z+y=2R$ (§. 32.), mithin auch $m+y=2R$.

§. 39.

Lehrs. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß ein Paar Gegenwinkel zusammen n i c h t g l e i c h 2R, ein Paar Wechsel- oder correspondirender Winkel ungleich sind; so ist kein Paar Gegenwinkel $=2R$, kein Paar Wechsel- oder correspondirender Winkel einander gleich.

Bew. Es ist ebenso leicht zu zeigen, wie §. 38, daß, wenn eine von den folgenden 12 Ungleichungen vorausgesetzt wird, nothwendig auch die 11 andern Statt haben müssen (Fig. 18.):

1) $p+x>2R$	7) $n<y$
2) $q+v<2R$	8) $m>z$
3) $n+z<2R$	9) $p>z$
4) $m+y>2R$	10) $x>n$
5) $p>v$	11) $q<y$
6) $q<x$	12) $v<m$.

Man habe z. B. aus Nr. 6) $q < x$ zu beweisen, daß Nr. 3) Statt finde, d. i. $n + z < 2R$ sei.

Es ist $x + z = 2R$ (§. 32.). Davon

$x > q$ (Dat.) abgezogen, gibt

$z < 2R - q$. Addirt man hiezu

$n = q$ (§. 35.); so hat man

$n + z < 2R$.

b) Praktische Sätze.

§. 40.

Aufg. Einen gegebenen Winkel nachzuzeichnen, d. h. einen Winkel zu construiren, der einem gegebenen gleich ist.

Aufl. u. Bew. Es sei m (Fig. 16.) der gegebene Winkel. Man beschreibe aus dem Scheitel B desselben mit beliebigem Radius (BC) zwischen seinen Schenkeln den Bogen CA; nehme sodann eine Gerade EG, und beschreibe aus einem Endpunkte (E) derselben mit dem nämlichen Radius (BC) einen unbestimmt langen Bogen, fasse die Entfernung der Punkte A und C in den Zirkel, und trage diese, von F aus, auf dem aus E beschriebenen Bogen auf, wodurch der Punkt D bestimmt wird. Zieht man nun noch durch E und D eine Gerade, so ist DEF der gesuchte Winkel (§. 36, Zus. 2.); denn es ist EF = BC (Constr.) und arc. DF = arc. AC.

Anm. Hiemit ist auch die Aufgabe gelöst „einen Winkel nachzuzeichnen, dessen Scheitel in einem gegebenen Punkte einer gegebenen geraden Linie liegt."

§. 41.

Aufg. Einen gegebenen Winkel zu verdoppeln.

Aufl. Ist ACB (Fig. 19.) der gegebene Winkel, so beschreibe man aus seinem Scheitel C mit willkührlichem Radius einen unbestimmt großen Bogen, der die beiden Schenkel in D und E schneidet, trage dann aus E die Zirkelöffnung DE nach F auf, und ziehe durch C und F eine Gerade; so ist $\measuredangle FCB = 2.ACB$. Denn es ist $\measuredangle FCA = ACB$ (§. 36, Zus. 2.); ferner

$$\measuredangle FCB = FCA + ACB = ACB + ACB = 2.ACB.$$

Zus. 1. Hiernach läßt sich also das 3, 4....., allgemein das n=fache eines gegebenen Winkels construiren.

Zus. 2. Auf ähnliche Art kann ein Winkel verzeichnet werden, welcher mehreren gegebenen zusammengenommen gleich ist.

III. Kap. Von den Parallellinien.

§. 42.

Erkl. 1. Zwei (oder mehrere) gerade Linien, welche in der nämlichen Ebene liegen, und, soweit man sich dieselben auch verlängert denken mag, niemals zusammentreffen, heißen parallel (gleichlaufend) oder Parallellinien.

Das Parallelsein von Linien wird durch das Zeichen „$\#$" ausgedrückt. Sind Linien zugleich parallel und gleich, so wird „$\#$" gebraucht.

2. Gerade Linien, welche in einer Ebene liegen, und nicht parallel sind, also gehörig verlängert zusammentreffen (sich schneiden) müssen, nennt man aparallel, und zwar nach der Richtung hin betrachtet, in welcher dieses Zusammentreffen Statt findet, convergirend (zusammenlaufend oder convergent), nach der entgegengesetzten Seite divergirend (auseinanderlaufend oder divergent).

Um anzudeuten, daß zwei Linien AB und CD (Fig. 18.) aparallel seien, schreibt man: $AB \wedge CD$.

Zus. 1. Parallellinien haben keinen Punkt gemeinschaftlich.

Zus. 2. Convergirende Linien über ihren Treffungspunkt hinaus verlängert gedacht werden divergirend.

a) Theoretische Sätze.

§. 43.

Lehrs. Werden zwei gerade Linien von einer dritten so durchschnitten, daß I. ein Paar Gegenwinkel zusammen $= 2R$, oder II. ein Paar Wechselwinkel, oder III. ein Paar correspondirender Winkel einander gleich sind; so sind diese Linien parallel.

Dat. $\begin{cases} \text{I. } p + x = 2R \text{ (Fig. 17.), oder} \\ \text{II. } q = x, \text{ oder III. } n = x. \end{cases}$

Thes. $AB \# CD$.

Bew. Da der Voraussetzung gemäß $p + x = 2R$, so ist auch $q + v = 2R$ (§. 38, I.). Wollte man nun annehmen, daß die Linien AB und CD auf der einen Seite der Sekante EF, etwa über B und D hinaus gehörig verlängert sich schneiden würden; so muß man folgerecht annehmen, daß sie sich auf der andern Seite, über A und C hinaus verlängert, ebenfalls schnitten, weil die Summe der innern Gegenwinkel auf beiden Seiten dieselbe ist, also

die Linien AB und CD auf beiden Seiten der Sekante EF dieselbe Hinneigung gegen einander haben. Es müßten sich also AB und CD in zwei Punkten schneiden, dieses ist aber unmöglich (§. 16, Zus. 4.); also werden sie sich gar nicht schneiden, sind somit parallel.

Die Richtigkeit der Behauptung unter den Nr. II. und III. (Dat.) gemachten Voraussetzungen reduzirt sich (mittelst §. 38, Zus.) auf I.; denn es ist dann für beide Fälle $p + x = 2R$.

Zus. 1. Steht eine Gerade auf zwei andern zugleich senkrecht, so sind diese parallel.

Zus. 2. Stehen zwei (oder mehrere) gerade Linien auf einer dritten senkrecht, so sind sie parallel.

§. 44.

Lehrs. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß ein Paar innerer Gegenwinkel zusammen kleiner ist als 2R; so schneiden sich diese Linien (genugsam verlängert) auf der Seite der Sekante, auf welcher die genannten Winkel liegen.

Dat. $\measuredangle q + v < 2R$ (Fig. 18.).

Thes. AB und CD schneiden sich über A und C verlängert.

Bew. Wenn $q + v = 2R$, so ist $AB \parallel CD$ (§. 43). Aendert nun aber die Linie AB ihre Lage gegen die Sekante EF, so daß $\measuredangle q$ kleiner, folglich auch $q + v < 2R$ wird, so wird auch die Lage der Linie AB gegen CD sich ändern. Dreht sich nämlich AB um den Punkt G so, daß q kleiner, also p größer wird, so muß dadurch der in der Linie AB liegende Punkt A der Linie CD näher rücken, dagegen B sich weiter von CD entfernen, d. h. die Linien AB und CD werden in der Richtung von A und C convergiren (sich schneiden), dagegen in der Richtung von B und D divergiren.

Zus. Werden umgekehrt zwei convergirende (oder sich schneidende) gerade Linien von einer dritten geschnitten, so ist die Summe der innern Gegenwinkel auf der Seite der Sekante, auf welcher jene Linien convergiren, kleiner als 2R. Denn wäre (Fig. 18.) nicht $q + v < 2R$, so könnte nur $q + v \geqq 2R$ sein. Nimmt man aber an, es sei $q + v = 2R$, so wäre $AB \parallel CD$ (§. 43.); bei der Annahme $q + v > 2R$, wäre $p + x < 2R$, also müßten sich AB und CD auf der andern Seite der Sekante schneiden (Lehrs.). Beides ist gegen die Voraussetzung; somit ist $q + v < 2R$.

§. 45.

Lehrs. Werden zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten; so ist I. jedes Paar Gegenwinkel zusammen $= 2R$, II. jedes Paar Wechselwinkel und III. jedes Paar correspondirender Winkel einander gleich.

Dat. $AB \# CD$ (Fig. 17.).

Thes. I. $p + x = 2R$; II. $p = v$, und III. $p = z$.

Bew. Wäre nicht $p + x = 2R$, so müßte $p + x \gtrless 2R$ sein. In beiden Fällen müßten sich aber AB und CD auf der einen oder andern Seite der Sekante schneiden (§. 44.), wären also, gegen die Voraussetzung, nicht parallel.

Die Richtigkeit der beiden andern Behauptungen folgt nunmehr aus §. 38.

Zus. 1. Steht eine Gerade auf einer von zwei Parallelen senkrecht, so ist sie auch senkrecht auf der andern.

Zus. 2. Steht von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht, so ist auch die andere darauf senkrecht.

§. 46.

Lehrs. Von einem bestimmten Punkte außerhalb einer geraden Linie ist auf diese letztere nur eine einzige Senkrechte möglich.

Dat. $CD \perp AB$. — Thes. $CE \not\perp AB$ (Fig. 20.).

Bew. Da $CD \perp AB$, so ist $\measuredangle CDB = R$. Wäre auch $CE \perp AB$, so müßte aus gleichem Grunde $\measuredangle CEB = R$, folglich $\measuredangle CEB = CDB$ sein, und es wäre $CE \# CD$ (§. 43, III.), was offenbar ungereimt ist. Es kann also CE nicht auf AB senkrecht stehen; mithin ist $CE \not\perp AB$. (Vgl. §. 31.).

§. 47.

Lehrs. Gerade Linien, welche auf den Schenkeln eines hohlen Winkels senkrecht stehen, müssen sich (gehörig verlängert) schneiden.

Dat. $\measuredangle ABC < \pi$; $DE \perp AB$ und $FG \perp BC$ (Fig. 21.).

Thes. DE und FG schneiden sich.

Bew. Wegen $DE \perp AB$ ist $\measuredangle DEB = R$, ebenso ist $\measuredangle FGB = R$, wegen $FG \perp BC$; mithin $\measuredangle DEB + FGB = 2R$. Zieht man noch die Linie EG, so hat man

$$\sphericalangle DEG < DEB, \text{ ebenso}$$
$$\sphericalangle FGE < FGB; \text{ daher auch}$$
$$\sphericalangle DEG + FGE < DEB + FGB, \text{ d. i.}$$
$$\sphericalangle DEG + FGE < 2R;$$

mithin schneiden sich DE und FG (§. 44.).

Zus. Gerade Linien, welche auf zwei convergirenden andern Geraden senkrecht stehen, müssen gehörig verlängert sich treffen.

§. 48.

Lehrs. Durch einen bestimmten Punkt gibt es zu einer gegebenen Geraden nur eine einzige Parallele.

Dat. $CD \parallel AB$. — Thes. $FG \wedge AB$ (Fig. 22.).

Bew. Zieht man durch den (gegebenen) Punkt E und einen beliebigen Punkt L der Linie AB die Gerade HK, so ist $\sphericalangle HED = m$ (§. 45, III.). Wäre nun auch die durch E gezogene Gerade $FG \parallel AB$, so müßte aus demselben Grunde $\sphericalangle HEG = m$, daher auch $\sphericalangle HEG = HED$ sein, was offenbar nicht der Fall ist; folglich ist $FG \wedge AB$.

Zus. 1. Zwei parallele Linien sind also durch eine von ihnen (oder durch eine Gerade) und einen Punkt außer ihr gegeben.

Zus. 2. Schneidet eine Gerade die eine von zwei Parallelen, so schneidet sie (genugsam verlängert) auch die andere.

Zus. 3. Zwei Gerade, welche derselben dritten parallel sind, sind es auch unter sich. Denn ist (Fig. 23.) $CD \parallel AB$, ebenso $EF \parallel AB$, und man zieht eine Gerade GH, welche AB schneidet, so trifft sie auch CD und EF (Zus. 2.), wobei die Winkel m, n und p entstehen. Nun ist $\sphericalangle m = n$, und $\sphericalangle m = p$ (§. 45, III.); also auch $\sphericalangle n = p$, und daher $CD \parallel EF$ (§. 43, III.).

§. 49.

Lehrs. Sind die Schenkel zweier gleichnamiger Winkel beziehungsweise parallel, so sind die Winkel einander gleich.

Dat. $AB \parallel DE$ und $BC \parallel EF$ (Fig. 24.).

Thes. $\sphericalangle ABC = DEF$.

Bew. Zieht man durch die Scheitel beider Winkel die Gerade KL, so hat man (nach §. 45, III.):

$$\sphericalangle KBC = BEF, \text{ ebenso}$$
$$\sphericalangle KBA = BED; \text{ daher auch}$$
$$\sphericalangle KBC - KBA = BEF - BED, \text{ d. i.}$$
$$\sphericalangle ABC = DEF.$$

Hinsichtlich der stumpfen Winkel ABG und DEH ist der Beweis ganz ähnlich.

Anm. Zwei ungleichnamige Winkel (z. B. ABC und DEH) mit beziehungsweise parallelen Schenkeln ergänzen sich zu 2R.

b) Praktischer Satz.

§. 50.

Aufg. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zu einer gegebenen Geraden parallel ist.

Aufl. und Bew. Man verbinde (Fig. 25.) den gegebenen Punkt C mit einem beliebigen Punkte D der gegebenen Linie AB durch die Gerade CD, so entsteht der $\sphericalangle m$. Dann construire man (nach §. 40.) an C auf der andern Seite von CD den Winkel $n = m$; so ist der Schenkel EC desselben oder die Linie EF die gesuchte Parallele. Denn es ist $\sphericalangle n = m$ (Constr.); mithin EF ╫ AB (§. 43, II.).

Man löse die Aufgabe mit Anwendung der correspondirenden Winkel!

Anm. Mechanisch wird diese Aufgabe gewöhnlich mittelst des sogenannten Parallellineals, oder eines Lineals und Winkelhackens (aus Holz oder Metall) gelöst, den man an der Kante des Lineals fortschiebt.

IV. Kap. Von der Messung der Linien und Winkel.

§. 51.

Erkl. Nach dem Begriffe des Messens überhaupt (§. 12.) heißt

1) eine Linie messen angeben, wie oft eine als Einheit angenommene Linie in derselben enthalten sei,

2) einen Winkel messen bestimmen, wie oft ein als Maßeinheit für Winkel angenommener Winkel in dem gegebenen enthalten sei, oder in beiden Fällen das Verhältniß der gegebenen Größe zu ihrem Maße in Zahlen ausdrücken.

Die in beiden Beziehungen gebrauchte, bestimmte und unveränderliche Maßeinheit wird Grund- oder Normalmaß genannt.

a) Messung gerader Linien.

§. 52.

Erkl. 1. Die als Grundmaß zur Bestimmung der Länge anderer Linien angenommene Gerade (das Längenmaß) ist gewöhnlich der landesübliche Schuh oder Fuß, eine künstliche Maßeinheit, die (wenigstens in einzelnen Ländern) unveränderlich ist.

Andere im gewöhnlichen Leben öfter vorkommende natürliche Längenmaße sind: eine Spanne, Fausthöhe, Hand-, Armlänge, Fuß, Schritt.

2. Das bemerkenswertheste Normalmaß der neuern Zeit (eingeführt seit dem 7. April 1795) ist das französische Dezimalmaß, dessen Einheit ein Meter ($=1^m$) genannt wird, und der zehnmillionste Theil vom nördlichen Quadranten eines Erdmeridians, d. i. des Bogens vom Aequator bis zum Nordpol ist.

Unterabtheilungen des Meter werden durch lateinische, Vervielfachungen durch griechische Zahlwörter ausgedrückt, die man dem Worte Meter voraussetzt, und zwar ist:

1^m = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter; ferner
= 0·1 Dekameter = 0·01 Hektometer = 0·001 Kilometer = 0·0001 Myriameter.

3. Das in Bayern übliche Längenmaß ist der bayerische Fuß oder Schuh; er beträgt 0·291859 Meter; und umgekehrt ist $1^m = 3{\cdot}42631$ bayer. Fuß.

Anm. 1. Noch andere wichtige und häufig vorkommende Längenmaßeinheiten sind: der alte Pariser-Fuß (Pied du roi), deren 6 eine Toise ($=1^t$) geben; der rheinische oder preußische Fuß; der Wiener- und der englische Fuß, welchem der russische gleich ist.

Anm. 2. Zur Vergleichung der obengenannten Maßeinheiten und zu Verwandlungen dient folgende leicht verständliche Tabelle:

Bayr. Fuß	Meter	Par. Fuß	Preuß. oder rhein. Fuß	Wiener Fuß	Engl. u. russ. Fuß
1	0·291859	0·898472	0·929922	0·923281	0·957561
3·426310	1	3·078444	3·186199	3·163446	3·280899
1·113000	0·324839	1	1·035003	1·027612	1·065765
1·075359	0·313853	0·966181	1	0·992859	1·029722
1·083094	0·316111	0·973130	1·007193	1	1·037128
1·044320	0·304794	0·938293	0·971136	0·964201	1

§. 53.

Erkl. 1. Um den Schuh oder Fuß bequemer mit jeder Art von Längen vergleichen zu können, wird derselbe in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt, von denen jeder ein Zoll heißt. Jeder Zoll enthält wieder ebensoviele gleiche Theile, von denen jeder eine Linie genannt wird; jede Linie besteht wieder aus ebensovielen gleichen Theilen, die man Skrupel nennt.

Zur kürzern Bezeichnung drückt man z. B. eine Länge von 20 Fuß, 7 Zoll, 8 Linien und 3 Skrupel dadurch aus, daß man schreibt 20′ 7″ 8‴ 3⁗.

2. Die obengenannte Eintheilung des Schuh selbst geschieht:

a) geometrisch oder zehntheilig, daher Dezimalmaß (kurz bezeichnet durch dc) genannt; und hiernach ist

$$1' = 10'' = 100''' = 1000'''' \text{; ferner}$$
$$1'' = 10''' = 100''''$$
$$1''' = 10'''' ;$$

b) zwölftheilig, daher Duodezimalmaß (kurz ddc), auch Werkmaß genannt; diesem gemäß ist

$$1' = 12'' = 144''' = 1728''''$$
$$1'' = 12''' = 144''''$$
$$1''' = 12''''.$$

Skrupel werden (nach beiden Eintheilungen) in der Praxis gewöhnlich nur in Dezimaltheilen der Linien angegeben.

Zus. Eine Linie messen heißt demnach auch angeben, wie viele Schuh, Zoll ꝛc. dieselbe enthalte, oder ihre Länge (Größe oder Quantität) in Schuh, Zoll und Linien bestimmen.

§. 54.

Erkl. Von den üblichen Längenmaßen, welche größer sind als der Schuh, sind zu bemerken:

1) die bayer. Elle = 2′ 10″ 3‴ ddc = 2′ 8″ 5·4‴ dc;
2) die normale Scheiterlänge = $3\frac{1}{2}'$;
3) die Klafterlänge (Faden, Lachter) = 6′;
4) die Ruthe (kurz 1^0) = 10′ dc und 12′ ddc;
5) die Feld- oder Ackerlänge = 200′;
6) die bayr. Chausseestunde = 12703′;
7) die deutsche Meile = 25380′.

§. 55.

Erkl. 1. Eine gerade Linie (gewöhnlich angebracht auf einem ebenen Stabe von Holz, Messing oder Eisen), auf welcher das Normalmaß ein- oder mehrmal mit seinen Unterabtheilungen genau verzeichnet ist, heißt ein (natürlicher) Maßstab.

2. Ein Maßstab, welcher in mehrfach verkleinertem Maße eine wirkliche Länge vorstellt, wird ein verjüngter Maßstab genannt.

Zus. Eine Gerade wird also gemessen, wenn man einen Maßstab so oft als möglich an ihr abträgt; die Zahl, welche angibt, wie oft dieß geschehen, ist die gesuchte Länge (§. 51, 1.).

§. 56.

Erkl. 1. Jeder Kreis (er mag mit was immer für einem Radius beschrieben sein) wird in 360 gleiche Theile eingetheilt, von denen jeder ein Grad (Bogengrad) heißt; jeden Grad theilt man wieder in 60 gleiche Theile, welche Minuten; ebenso jede Minute in 60 gleiche Theile, welche Sekunden genannt werden.

Zur kürzern Bezeichnung schreibt man z. B. ein Bogen hat $45^0\ 30'\ 24''$ statt 45 Grade, 30 Minuten, 24 Sekunden.

Obiger Eintheilung zufolge, welche man Sexagesimaleintheilung nennt, ist, wenn man die Kreislinie mit P bezeichnet:

$$P = 360^0 = 21600' = 1296000''$$
$$1^0 = 60' = 3600''$$
$$1' = 60''.$$

2. Durch die Angabe eines Bogens im Gradmaße, d. i. in Graden, Minuten und Sekunden wird nicht seine Länge nach irgend einem Längenmaße, sondern nur sein Verhältniß zur ganzen Kreislinie bestimmt. Ist z. B. ein Bogen $n = 48^0\ 30'$, so hat man, da $P = 360^0$ ist,

$$n \div P = 48^0\ 30' \div 360^0 = 48\tfrac{1}{2} \div 360 = 97 \div 720; \text{ also}$$

$$n = \frac{48 \cdot 5}{360} \cdot P = \frac{97}{720} \cdot P,$$ d. h. er ist der sovielte Theil der ganzen Kreislinie, als die Anzahl seiner Grade ein Theil von 360^0 ist.

Von der Bestimmung des Kreises oder eines Bogens nach dem Längenmaße kann erst später (im IV. Kap. der Kreislehre) gehandelt werden.

Zus. Der Halbkreis enthält also 180^0, der Quadrant 90^0.

Anm. In Frankreich theilte man den Kreis nach dem Dezimal- oder Centesimalsysteme in 400°, jeden Grad in 100′, jede Minute in 100″, so daß also

$$P = 400^\circ = 40000' = 4000000''$$
$$1^\circ = 100' = 10000''$$
$$1' = 100''$$

ist, und der Halbkreis 200°, der Quadrant 100° enthält.

§. 57.

Aufg. Dezimalmaß in Duodezimalmaß zu verwandeln und umgekehrt.

Aufl. Man verwandle die gegebenen größern Maßeinheiten in Fuß, die kleinern in Dezimaltheile des Fußes, dividire dann

I. bei Verwandlung des Dezimalmaßes in Duodezimalmaß die Ganzen durch 12, so gibt der (ganze) Quotient Ruthen, der Rest Fuß. Wird der Dezimalbruch mit 12 multiplizirt, so sind die Ganzen des Produktes Zolle, mit den hiebei sich ergebenden Dezimalen auf gleiche Weise verfahren erhält man Linien u. s. w.

Z. B. $38^\circ 7' 5'' 3'''$ dc $= 387{\cdot}53'$. Nun wird

$387' : 12 = 32\frac{3}{12}{}^\circ = 32^\circ 3'$; dann

$0{\cdot}53' \times 12 = 6{\cdot}36''$, und

$0{\cdot}36'' \times 12 = 4{\cdot}32'''$; somit ist

$38^\circ 7' 5'' 3'''$ dc $= 32^\circ 3' 6'' 4{\cdot}32'''$ ddc.

II. Bei Verwandlung des Duodezimalmaßes in Dezimalmaß werden die Ganzen durch Division mit 10 in Ruthen und Fuß, die Dezimalen durch Multiplication mit 10 in Zolle, Linien &c. aufgelöst.

Z. B. $87^\circ 8' 11'' 7{\cdot}5'''$ ddc. $= 1052{\cdot}96875'$. Nun ist

$1052' : 10 = 105^\circ 2'$, dann wird

$0{\cdot}96875' = 9'' 6{\cdot}875'''$; mithin

$87^\circ 8' 11'' 7{\cdot}5'''$ ddc. $= 105^\circ 2' 9'' 6{\cdot}875'''$ dc.

Anm. Verwandelt man bei einer gegebenen Länge alles in Fuß und Dezimaltheile derselben, so kann dieselbe vermittelst der Tabelle §. 53, Anm. 2. leicht durch bloße Multiplication nach einer andern der daselbst vorkommenden Maßeinheiten ausgedrückt werden. So ist z. B. die Geschwindigkeit (c) des Schalles in trockener, ruhiger Luft 332·244 Meter; daher

$c = 332{\cdot}244 \times 3{\cdot}42631 = 1138{\cdot}36$ bayr. Fuß, oder

$= 332{\cdot}244 \times 3{\cdot}07844 = 1022{\cdot}78$ Par.-Fuß, oder

$= 332{\cdot}244 \times 3{\cdot}1862 = 1058{\cdot}48$ rhein. Fuß, oder

$= 332{\cdot}244 \times 3{\cdot}1634 = 1051{\cdot}03$ Wiener-Fuß &c.

b) Messung der Winkel.

§. 58.

Erkl. 1. Der als Normalmaß zur Bestimmung der Größe anderer Winkel angenommene Winkel ist wegen seiner constanten Größe der Rechte (vgl. §. 31, Zus. 2.).

2. Man theilt den rechten Winkel, um ihn bequemer mit allen Gattungen von Winkeln vergleichen zu können, nach der sogenannten Sexagesimaleintheilung in 90 gleiche Theile, von denen jeder ein Grad (Winkelgrad) heißt. Jeder Grad wird wieder in 60 Minuten; jede Minute in 60 Sekunden eingetheilt; noch kleinere Theile werden in Dezimaltheilen von Sekunden ausgedrückt. Die Bezeichnung für die Grade, Minuten und Sekunden ist dieselbe, wie §. 56, 1., und man hat demnach

$$R = 90^0 = 5400' = 324000'', \text{ ferner}$$
$$1^0 = 60' = 3600'', \text{ und}$$
$$1' = 60''.$$

Nach der Dezimal- oder Centesimaleintheilung ist

$$R = 100^0 = 10000' = 1000000''$$
$$1^0 = 100' = 10000''$$
$$1' = 100''.$$

Zus. 1. Einen Winkel messen heißt also auch seine Größe in Graden, Minuten und Sekunden bestimmen.

Zus. 2. Jeder gerade, sowie jede zwei Neben- (oder Supplements-) Winkel sind $= 180^0$; zwei Complementswinkel $= 90^0$; alle Winkel rings um einen Punkt $= 4.90^0 = 360^0$; jeder spitze Winkel $< 90^0$, jeder stumpfe $> 90^0$.

§. 59.

Lehrs. Beschreibt man aus dem Scheitel eines rechten Winkels mit beliebigem Radius einen Kreis, so ist der zwischen den Schenkeln des Winkels liegende Bogen ein Quadrant.

Dat. $\measuredangle ABC = R$. — Thes. $\text{arc}\, AC = \frac{1}{4} P = 90^0$ (Fig. 26.).

Bew. Verlängert man die Schenkel des gegebenen Winkels über den Scheitel hinaus, bis sie den Kreis in D und E treffen, so wird derselbe in vier Theile getheilt. Da nun $\measuredangle ABC = R$, so sind alle vier Winkel um den Punkt B rechte (§. 35, Zus. 2.);

mithin ist auch arc. $AC = CD = DE = AE = \frac{1}{4}P$ (§. 36, I.), oder, weil $P = 360^0$ ist (§. 56.), arc $AC = \frac{1}{4}P = 90^0$.

Zus. Durch zwei sich senkrecht schneidende Diameter wird also jeder Kreis in vier gleiche Theile getheilt.

§. 60.

Lehrs. Jeder Winkel enthält ebensoviele Winkel-Grade, Minuten und Sekunden, als ein mit beliebigem Radius aus seinem Scheitel zwischen den Schenkeln beschriebener Kreisbogen Bogengrade 2c. enthält.

Thes. $\measuredangle ACB =$ arc DE (Fig. 27.).

Bew. Denkt man sich die Linie $CF \perp AB$, und dann aus C mit beliebigem Radius den Bogen DEF beschrieben, so ist $\measuredangle FCB = R$, und arc DF ein Quadrant (§. 59.). Stellt man sich ferner vor, es lasse sich der Bogen DG genau auf den Bogen DE und DF abtragen, und zwar auf ersterem m mal, auf letzterem n mal, so ist offenbar arc. $DE = m.DG$, und arc $DF = n.DG$. Hieraus folgt (nach arithmet. Gesetzen)

1) arc $DE \div$ arc $DF = m.DG \div n.DG = m \div n$.

Würden endlich noch an alle durch das Auftragen von arc DG in den Bogen DE und DF erhaltenen Theilungspunkte aus dem Scheitel C Radien gezogen, so wird $\measuredangle ACB$ in m und $\measuredangle FCB$ in n Winkel getheilt, welche sämmtlich einander gleich sind (§. 36, Zus. 2.), und von denen einer $\measuredangle GCB$ ist. Dadurch wird also $\measuredangle ACB = m.\ GCB$ und $\measuredangle FCB = n.\ GCB$; mithin

2) $\measuredangle ACB \div \measuredangle FCB = m.GCB \div n.GCB = m \div n$.

Durch Comperation der Proportionen 2) und 1) ergibt sich

3) $\measuredangle ACB \div \measuredangle FCB =$ arc $DE \div$ arc DF.

Da aber $\measuredangle FCB = R = 90^0$, ebenso als Quadrant arc $DF = 90^0$, so ist auch $\measuredangle ACB =$ arc DE.

Zus. Das Maß eines Winkels ist also der Kreisbogen, welcher aus dem Scheitel des Winkels mit beliebigem Radius zwischen dessen Schenkeln beschrieben wird.

Anm. Hierauf beruht die Einrichtung und der Gebrauch des sogenannten Transporteurs (Winkelmessers), eines Halbkreises (gewöhnlich auf Messing oder durchscheinendem Horn), welcher in 180^0, und zwar zur bequemern Handhabung auf doppelte Weise, eingetheilt ist (Fig. 28.).

§. 61.

Aufg. Mittelst des Transporteurs auf dem Papiere I. die Größe eines gegebenen Winkels zu bestimmen, und II. einen Winkel von gegebener Anzahl Grade zu verzeichnen.

Aufl. u. Bew. I. Man lege (Fig. 28.) den Mittelpunkt des Transporteurs so an die Spitze C des Winkels ACB, daß sein Radius den Schenkel CB deckt, dann zähle man von B gegen A hin auf dem eingetheilten Rande bis zu dem Punkte E, der auf dem andern Schenkel AC liegt; so ist durch die Anzahl der Grade dieses Bogens auch die des Winkels ACB gegeben (§. 60).

II. Man lege an eine Gerade CB den Transporteur so, daß sein Mittelpunkt in C, und sein Radius auf CB fällt, zähle auf dem eingetheilten Rande des Transporteurs von 0^0 an bis zur gegebenen Anzahl Grade (z. B. 37^0), bemerke den einschlägigen Punkt durch E, und ziehe durch C und E die Gerade CA; so ist $\measuredangle$ ACB der gesuchte (§. 36, Zus. 3.).

Anm. Dieses Verfahren, einen Winkel zu bestimmen, ist jedoch bloß mechanisch, und eine ungefähre Schätzung desselben. Von der genauen Winkelbestimmung handelt die Trigonometrie.

§. 62.

Aufg. Die Größe eines Winkels, der in Theilen eines Rechten gegeben ist, I. in Graden, Minuten und Sekunden zu bestimmen, und II. umgekehrt.

Aufl. u. Bew. I. Man setze (nach §. 58.) $R = 90^0$ (oder $R = 100^0$), und führe die angezeigte Multiplication und Division aus, so erhält man Grade und Dezimaltheile derselben, welche durch fortgesetzte Multiplication mit 60 (oder 100) in Minuten und Sekunden resolvirt werden.

Ist z. B. ein Winkel $\alpha = \frac{10R}{7}$, so erhält man

a) nach der Sexagesimaleintheilung, $R = 90^0$ gesetzt:

$$\alpha = \frac{900^0}{7} = 128{\cdot}571428^0 \ldots = 128^0\, 34{\cdot}28568'$$
$$= 128^0\, 34'17{\cdot}1408''.$$

b) Nach der Centesimaleintheilung ergibt sich, $R = 100^0$ gesetzt:

$$\alpha = \frac{1000}{7} = 142{\cdot}8571428^0 \ldots = 142^0\, 85'71{\cdot}428''.$$

II. Man reduzire die Minuten und Sekunden auf Dezimaltheile der Grade, dividire diese durch 90 und multiplizire den Quotus mit R; denn es ist $90^0 = R$, daher $1^0 = \frac{1}{90}R$, und $n^0 = n \cdot \frac{R}{90} = \frac{n}{90} \cdot R$.

Z. B. $46^0\,24'\,22{\cdot}5'' = 46{\cdot}40625^0 = 46\frac{13^0}{32} = \frac{1485^0}{32}$; daher wird

$$46^0\,24'\,22{\cdot}5'' = \frac{46{\cdot}40625}{90} \cdot R = \frac{1485}{90.32} \cdot R = \frac{33}{64} \cdot R.$$

Anm. Auf dieselbe Weise geschieht auch die Bestimmung eines Bogens, der in Theilen der Kreislinie (P) gegeben ist, nach Graden 2c., und umgekehrt (vgl. §. 56.).

§. 63.

Aufg. Centesimalgrade (C) in Sexagesimalgrade (S) zu verwandeln, und umgekehrt.

Aufl. und Bew. I. Man verwandle die Minuten und Sekunden in Dezimaltheile der Grade, subtrahire vom Ganzen seinen 10^{ten} Theil; so ist der Rest die gesuchte Anzahl Grade nach der Sexagesimaleintheilung. Denn es ist $100^0\,C = 90^0\,S = R$; daher $1^0\,C = \frac{9^0}{10}S = \left(1 - \frac{1}{10}\right)^0 S$; also auch $N^0\,C = \left(N - \frac{N}{10}\right)^0 S$.

Z. B. $78^0\,45'\,95''\,C = 78{\cdot}4595^0$; davon der zehnte Theil
$7{\cdot}84595$ abgezogen, gibt
$70{\cdot}61355^0\,S$.

Verwandelt man noch den Bruch durch fortgesetzte Multiplication mit 60 in Minuten und Sekunden, so erhält man endlich

$$78^0\,45'\,95''\,C = 70^0\,36'\,48{\cdot}78''\,S.$$

II. Man vermehre, nachdem die gegebenen Minuten und Sekunden in Dezimaltheile der Grade verwandelt worden, das Ganze um seinen neunten Theil; so ist die Summe die gesuchte Anzahl Centesimalgrade. Denn $90^0\,S = 100^0\,C$; daher

$$1^0\,S = \frac{10^0}{9}C = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^0 C, \text{ und } n^0\,S = \left(n + \frac{n}{9}\right)^0 C.$$

Z. B. $106^0\,15'\,42''\,S = 106{\cdot}2616666..$, dazu der neunte Theil
$11{\cdot}8068518..$ addirt, gibt
$118{\cdot}0685184^0\,C$; also

$$106^0\,15'\,42''\,S = 118^0\,6'\,85{\cdot}184''\,C.$$

II. Abschnitt. Von den geometrischen Figuren.

§. 64.

Erkl. 1. Unter einer geometrischen Figur versteht man eine vollständige, d. i. von allen Seiten begrenzte Fläche. (Vgl. §. 9, 3.)

2. Hinsichtlich der begrenzten Fläche nennt man eine Figur a) eben, wenn die Fläche selbst eben, b) krumm, wenn dieselbe uneben ist (vgl. §. 19, 2.).

Anm. Die Planimetrie betrachtet nur ebene Figuren.

§. 65.

Erkl. 1. Die ganze Begrenzung einer Figur, d. i. die Summe aller begrenzenden Linien, wird Umfang, Perimeter oder auch (besonders, wenn sie eine einzige krumme Linie ist) Peripherie genannt.

2. Die Quantität einer Figur, d. i. die durch den Umfang vollständig eingeschlossene (begrenzte) Fläche heißt deren Flächeninhalt, Flächenraum oder Arealgröße.

§. 66.

Erkl. Nach den sie begrenzenden Linien heißt eine Figur:

1) geradlinig, wenn sie von lauter geraden,

2) krummlinig, wenn sie von lauter oder einer krummen,

3) gemischtlinig, wenn sie von geraden und krummen Linien eingeschlossen ist.

Anm. Gegenstand der Elementargeometrie sind mit Ausnahme des Kreises nur geradlinige Figuren.

A. Von den geradlinigen Figuren.

§. 67.

Erkl. 1. Jede der einzelnen Begrenzungslinien einer geradlinigen Figur heißt eine Seite derselben.

2. Die Winkel, welche je zwei Seiten in ihrem Durchschnittspunkte einschließen, nennt man Ecken der Figur.

Zus. 1. Zur Begrenzung einer Figur sind wenigstens drei gerade Linien nöthig (§. 16, Zus. 4.).

Zus. 2. In jeder geradlinigen Figur ist die Anzahl der Seiten und Ecken gleich groß.

§. 68.

Erkl. 1. Geradlinige Figuren werden allgemein nach der Anzahl ihrer Ecken benannt; und eine dreiseitige Figur heißt demnach ein Dreieck, eine vierseitige Viereck u. s. w. Jede Figur, welche mehr als vier Seiten hat, nennt man überhaupt ein Vieleck oder Polygon.

Die Bezeichnung einer geradlinigen Figur geschieht dadurch, daß man an jede Ecke derselben einen Buchstaben schreibt.

2. Die Ecken eines Polygons werden gewöhnlich Umfangs- oder Polygonswinkel desselben genannt.

§. 69.

Erkl. 1. Zwei Seiten eines Polygons, welche an derselben Ecke liegen, also Schenkel desselben Polygonswinkels sind, heißen anliegende oder anstoßende Seiten, außerdem werden sie gegenüberliegend, opponirt oder Gegenseiten genannt.

2. Zwei Ecken, die eine Seite eines Polygons als gemeinschaftlichen Schenkel haben, nennt man gleichfalls anliegend, sonst gegenüberliegend, opponirt oder Gegenwinkel.

§. 70.

Erkl. 1. Jede gerade Linie, welche zwei gegenüberliegende Ecken eines Polygons verbindet, heißt eine Diagonallinie oder Diagonale, z. B. BE (Fig. 29.).

2. Alle Geraden, welche aus einem beliebigen Punkte innerhalb einer Figur nach den Ecken derselben gezogen werden, nennt man Strahlenlinien, z. B. CF und DF.

§. 71.

Erkl. Eine Figur, welche bloß hohle Polygonswinkel hat, nennt man eine Figur mit ausspringenden Winkeln; ein erhabener Polygonswinkel dagegen heißt ein einspringender.

2. Verlängert man eine beliebige Seite einer Figur mit ausspringenden Winkeln über eine Ecke hinaus, so heißt der dadurch außerhalb der Figur entstehende Winkel ein äußerer oder Außenwinkel der Figur. Die Winkel in der Figur werden in Bezug auf ihn innere, und insbesondere jener, zu dem er Nebenwinkel ist, der innere anliegende, die andern gegenüberliegende oder opponirte genannt.

§. 72.

Lehrs. Eine Gerade, welche einen Punkt innerhalb und einen außerhalb einer Figur hat, schneidet den Umfang dieser Figur wenigstens in einem Punkte.

Bew. Da der Umfang einer Figur diese von dem übrigen Raume trennt, so kann (Fig. 29.) eine Gerade FG nicht ununterbrochen aus derselben hinausgehen, sondern muß wenigstens durch eine der Seiten hindurch, also den Umfang der Figur schneiden.

Zus. 1. Zieht man durch einen Punkt innerhalb einer Figur eine Gerade, so schneidet diese, gehörig verlängert, den Umfang derselben wenigstens in zwei Punkten.

Zus. 2. Hat eine Figur einen Punkt innerhalb und einen andern außerhalb einer andern, so schneiden sich die Perimeter beider Figuren wenigstens in zwei Punkten.

§. 73.

Erkl. In Hinsicht auf ihre Seiten und Winkel heißt eine Figur:

1) regulär oder regelmäßig, wenn alle Seiten und ebenso alle Winkel derselben einander gleich sind;

2) irregulär oder unregelmäßig, wenn nur das eine oder andere, oder keines von beiden der Fall ist. Im erstern Falle nennt man sie insbesondere a) gleichseitig, wenn sie alle Seiten, b) gleichwinklig, wenn sie alle Winkel gleich hat, c) symmetrisch, wenn je zwei Seiten parallel sind.

§. 74.

Erkl. 1. Ein Dreieck (Triangel, Trigonum) ist eine von drei sich wechselseitig treffenden Geraden eingeschlossene Figur.

Man setzt der Bezeichnung eines Dreieckes durch drei Buchstaben gewöhnlich noch das Zeichen „$\triangle$“ voran, welches durch „Dreieck“ übersetzt wird.

2. Jene Seite, auf der man sich ein Dreieck gleichsam stehend oder errichtet denkt, nennt man Grundlinie, Grundseite oder Basis; die beiden andern Seiten Nebenseiten; den Scheitel des Winkels, welcher der als Basis angenommenen Seite gegenübersteht, die Spitze, und die Senkrechte von der Spitze auf die Basis oder deren Verlängerung, die Höhe des Dreieckes.

Ist z. B. im $\triangle$ABC (Fig. 30.) AC die Basis, so sind AB und BC die Nebenseiten, B die Spitze und das Loth BD die Höhe.

Zus. Jeder Seite eines Dreieckes liegen zwei Winkel an, der dritte gegenüber; ebenso wird ein Winkel von zwei Seiten eingeschlossen, die dritte liegt ihm gegenüber.

§. 75.

Erkl. Ein Dreieck läßt sich auf doppelte Art betrachten

1) in Rücksicht auf die Seiten, und heißt dann

a) gleichseitig, wenn alle drei Seiten einander gleich sind,

b) gleichschenklig, wenn nur zwei,

c) ungleichseitig, wenn keine Seite der andern gleich ist.

Im gleichschenkligen Dreiecke nennt man die beiden gleichen Seiten die Schenkel, und betrachtet die ihnen ungleiche dritte Seite als Basis.

2) In Hinsicht auf die Winkel nennt man ein Dreieck

a) rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel hat, außerdem

b) schiefwinklig, und zwar insbesondere

α) spitzwinklig, wenn es lauter spitze,

β) stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel hat.

Im rechtwinkligen Dreiecke werden vorzugsweise die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten die Katheten, die demselben gegenüberliegende die Hypotenuse genannt.

Zus. Jedes gleichseitige Dreieck ist auch gleichschenklig, aber nicht umgekehrt.

§. 76.

Lehrs. In jedem Dreiecke ist I. die Summe je zweier Seiten größer, II. ihre Differenz kleiner als die dritte Seite.

Thes. $\begin{cases} \text{I. } AB + BC > AC \text{ (Fig. 30.).} \\ \text{II. } AB - BC < AC. \end{cases}$

Bew. I. Die Seiten AB und BC bilden eine gebrochene Linie zwischen den Punkten A und C, zwischen welchen AC die Gerade ist; daher ist $AB + BC > AC$ (§. 16, Zus. 2.).

II. Da $AB < AC + BC$ (Nr. I.), so ist auch

$AB - BC < AC + BC - BC$, d. i.

$AB - BC < AC$.

Zus. Im gleichschenkligen Dreiecke ist also jeder Schenkel größer, als die halbe Basis.

§. 77.

Lehrs. In jedem Dreiecke sind die drei Winkel zusammen gleich zwei Rechten, oder $= 180^0$.

Thes. $\measuredangle$ m + n + p = 2R = 180° (Fig. 31.).

Bew. Man ziehe durch den Punkt B eine Gerade DE ∦ AC, so entstehen die Winkel x und y, und es ist x + n + y = 2R (§. 32, Zus. 4.); aber $\measuredangle$ x = m und y = p (§. 45, II.); folglich $\measuredangle$ m + n + p = 2R = 180°.

Zus. 1. Zwei Winkel eines Dreieckes sind also zusammen stets kleiner als 2R. (Vgl. §. 44, Zus.)

Zus. 2. Ein Dreieck kann nur einen rechten, ebenso nur einen stumpfen Winkel haben.

Zus. 3. Im rechtwinkligen Dreiecke sind die beiden Winkel an der Hypotenuse zusammen = R; ist daher einer von ihnen bekannt, so ist es auch der andere (vgl. §. 34, Erkl. u. Zus. 2.).

Zus. 4. Ein Winkel eines Dreieckes bestimmt die Summe der beiden andern, die Summe zweier aber den dritten.

Zus. 5. Haben zwei Dreiecke zwei Winkel beziehungsweise gleich, so sind auch die dritten einander gleich.

§. 78.

Lehrs. Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist der Summe der innern gegenüberliegenden gleich.

Thes. $\measuredangle$ BCD = $\alpha + \beta$ (Fig. 32.).

Bew. Man ziehe durch C eine Gerade CE ∦ AB, so hat man $\measuredangle$ m = α und n = β (§. 45.); daher auch m + n = $\alpha + \beta$, oder $\measuredangle$ BCD = $\alpha + \beta$.

Zus. 1. Ein Außenwinkel eines Dreieckes ist also größer, als jeder der innern gegenüberliegenden einzeln.

Zus. 2. Jeder der innern gegenüberliegenden Winkel eines Dreieckes ist gleich der Differenz zwischen dem Außenwinkel und dem andern innern gegenüberliegenden Winkel. Denn aus $\measuredangle$ BCD = $\alpha + \beta$, folgt α = BCD − β.

Wie läßt sich der Lehrs. noch auf andere ebenso einfache Art mittelst §. 32. und §. 77. beweisen?

§. 79.

Lehrs. Haben zwei Dreiecke eine gemeinschaftliche Basis, und die Spitze des einen liegt innerhalb des andern; so ist I. die Summe der Nebenseiten des innern kleiner, II. der von ihnen eingeschlossene Winkel größer als im äußern Dreiecke.

Thes. $\begin{cases} \text{I. } AD + DC < AB + BC \text{ (Fig. 33.).} \\ \text{II. } \measuredangle ADC > ABC. \end{cases}$

Bew. I. Man verlängere eine Seite AD des innern Dreieckes ADC, bis sie BC in E trifft, so ist in dem $\triangle$ ABE:

$AD + DE < AB + BE$ (§. 76.); ebenso im $\triangle$ DCE:

$DC < CE + DE$; also auch (durch Addition)

$AD + DE + DC < AB + BE + CE + DE$, d. i.

$AD + DC < AB + BC$.

II. Als Außenwinkel des $\triangle$ CDE ist $\measuredangle ADC > n$, aus demselben Grunde $n > ABC$; also um so mehr $\measuredangle ADC > ABC$.

§. 80.

Erkl. 1. Ein Viereck (Quadrangulum, Tetragonum) ist eine von vier Linien eingeschlossene Fläche.

2. In Hinsicht auf die Lage der gegenüberstehenden Seiten unterscheidet man drei Arten von Vierecken:

a) das Parallelogramm, wenn jedes Paar Gegenseiten,

b) das Trapez, wenn nur ein Paar Seiten,

c) das Trapezoid, wenn keine Seite zur andern parallel ist.

Von den vier Buchstaben, mit welchen ein Viereck bezeichnet wird, werden oft nur zwei gegenüberstehende gelesen, wenn dieselben nicht durch eine Diagonale verbunden sind. So sagt man z. B. (Fig. 34.) entweder Viereck ABCD oder AC.

2. Eine Senkrechte, welche in einem Parallelogramme oder Trapez aus einem Punkte einer Seite auf die zu ihr parallele, oder deren Verlängerung gezogen ist (z. B. CE, Fig. 35.), nennt man Höhe; die Seite selbst aber, auf welche sie gezogen ist, Grundlinie oder Basis dieser Figur.

Anm. Ein Trapezium nennt man auch a) gleichschenklig oder ein Antiparallelogramm, wenn seine nicht parallelen Seiten einander gleich sind, b) rechtwinklig, wenn eine der aparallelen Seiten auf den parallelen senkrecht steht.

§. 81.

Lehrs. In jedem Vierecke ist die Summe der Winkel $= 4R$.

Thes. $\measuredangle A + ABC + C + ADC = 4R$ (Fig. 34.).

Bew. Man ziehe eine Diagonale BD, so werden durch dieselbe zwei Winkel in je zwei Theile und das Viereck in zwei Dreiecke getheilt. Die Winkelsumme eines jeden Dreieckes ist aber $= 2R$, folglich die von zwei Dreiecken, also die 4 Winkel des Viereckes $= 2.2R = 4R$.

§. 82.

Lehrs. In jedem Parallelogramme ist I. jedes Paar anliegender Winkel zusammen genommen $= 2R$; II. jedes Paar gegenüberstehender Winkel einander gleich.

Dat. AB ╫ CD und AD ╫ BC (Fig. 35.).

Thes. $\begin{cases} \text{I. } m + n = 2R = m + p \text{ ꝛc.} \\ \text{II. } m = q \text{ und } n = p. \end{cases}$

Bew. I. Folgt unmittelbar aus §. 45, I.

II. Es ist $m+p=2R=p+q$ (I. Fall), also $m+p=p+q$; mithin $m=q$. Ebenso ergibt sich $n=p$.

Zus. Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter, so sind auch die andern drei rechte (Lehrs. und §. 45, Zus. 2.); ist ferner ein Winkel bekannt, so sind es auch die übrigen.

§. 83.

Lehrs. Ist in einem Vierecke jedes Paar gegenüberstehender Winkel einander gleich; so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Dat. $\measuredangle m = q$ und $n = p$ (Fig. 35.).

Thes. AB ╫ CD und AD ╫ BC.

Bew. Da $m = q$ und $p = n$, so ist auch $m + p = n + q$. Ferner ist $m + p + q + n = 4R$ (§. 81.), oder

$2(m + p) = 4R$, also $m + p = 2R$; und daher

AB ╫ CD (§. 43, I.).

Weil ferner $n = p$, so ist auch $m + n = 2R$, und daher AD ╫ BC.

§. 84.

Lehrs. In jeder Figur ist I. die Anzahl der Diagonalen (N_d), die sich aus einer Ecke ziehen lassen, um **drei**, II. die Anzahl der Dreiecke (N_t), in welche sie dadurch getheilt wird, um **zwei** kleiner, als die Seitenanzahl (n) des Polygons.

Thes. I. $N_d = n - 3$. — II. $N_t = n - 2$ (Fig. 36.).

Bew. I. Nehmen wir eine beliebige Ecke, z. B. A; so kann aus ihr nach jeder andern, mit Ausnahme der beiden anliegenden B und Z eine Diagonale gezogen werden. Ist nun die Anzahl der Seiten des Polygons n, so ist also die der Diagonalen $n - 3$.

II. Die beiden äußersten Diagonalen AC und AY schließen mit 4 Polygonsseiten zwei Dreiecke ein. Von den noch übrigen

$n - 4$ Seiten, CD, DE . . . . XY, gehört jede einem andern Dreiecke an; also ist die Anzahl aller Dreiecke $(n-4)+2=n-2$.

Zus. 1. Die Anzahl aller Diagonalen, die sich in einem Polygon von n Seiten ziehen lassen, ist $\frac{1}{2}n\,(n-3)$. Denn aus jeder Ecke können $n-3$ gezogen werden, also hätte man eigentlich $n\,(n-3)$ Diagonalen; weil aber jede von ihnen zweimal vorkommt, so reducirt sich die Anzahl derselben auf die Hälfte.

Zus. 2. Die Anzahl aller Geraden zwischen n Punkten, von denen nur je zwei in einer geraden Linie liegen, ist $\frac{1}{2}n\,(n-1)$; denn sie ist offenbar die Summe aus allen Diagonalen eines Polygons nebst der Seitenanzahl desselben.

§. 85.

Lehrs. Die Summe (S) aller Polygonswinkel eines Vieleckes beträgt sovielmal 2R, als die um zwei verminderte Seitenzahl (n) des Polygons Einheiten enthält, oder sovielmal 2R, als dasselbe Seiten hat, weniger 4R.

Thes. $S = (n-2).2R = n.2R - 4R$.

Bew. Denkt man sich das Vieleck, durch Diagonalen, die sich nicht schneiden (z. B. Fig. 36.) in Dreiecke zerlegt, so ist die Anzahl dieser Dreiecke $n-2$; folglich die Summe aller Winkel derselben, die zusammen die Winkel des Polygons ausmachen, d. i. $S = (n-2).2R = n.2R - 4R$.

Zus. 1. Ist ein Vieleck von n Seiten gleichwinklig (oder regulär), so ist jeder Winkel (w) der n^{te} Theil der ganzen Summe; also

$$w = \frac{(n-2).2R}{n} = 2R - \frac{4R}{n} = 180^0 - \frac{360^0}{n}.$$

So findet man z. B. den Polygonswinkel des gleichwinkligen Sechseckes, oder $w_6 = 2R - \frac{4}{6}R = \frac{4}{3}R = 120^0$.

Zus. 2. Jeder Polygonswinkel eines regulären Vieleckes ist kleiner als 2R, also ein hohler Winkel (Zus. 1.).

Zus. 3. In allen Polygonen mit gleicher Anzahl von Seiten ist die Summe der Umfangswinkel gleich groß; daher auch in allen regulären jeder Polygonswinkel des einen so groß, als einer im andern.

Zus. 4. Jedes Polygon muß wenigstens drei hohle Winkel haben; denn hätte es nur zwei, so wäre die Summe der übrigen $n-2$ Winkel allein schon $> (n-2).2R$, was unmöglich ist.

§. 86.

Lehrs. In jeder Figur beträgt I. die Summe (S′) der Außenwinkel 4R; II. die Summe (S″) der Winkel außen am Umfange sovielmal 2R, als die um zwei vermehrte Seitenanzahl (n) des Vieleckes Einheiten enthält.

Thes. I S′ = 4R. — II. S″ = (n + 2) . 2R.

Bew. I. Verlängert man die Seiten des Polygons (Fig. 37.) nach einerlei Richtung, so entstehen die Außenwinkel m, q, p u. s. f., von denen jeder mit dem anliegenden innern Winkel 2R ausmacht. Die Summe aller dieser Nebenwinkel ist = n . 2R. Subtrahirt man davon die Summe der innern Winkel (§. 85.), so ergibt sich für die der äußern n . 2R — (n . 2R — 4R) = 4R.

II. Von den (meistens erhabenen) Winkeln außen am Umfange beträgt jeder mit dem anliegenden innern 4R (§. 32, Zus. 5.); also ist die Summe aller nebst den innern = n . 4R = 2n . 2R. Zieht man hievon die Summe der innern ab, so erhält man:

$$S'' = 2n.2R - (n.2R - 4R) = (n + 2) . 2R.$$

§. 87.

Erkl. Werden zwei (oder mehrere) Figuren auf einander bezogen oder miteinander verglichen, so nennt man sie

1) gleichnamig, wenn sie gleich viele Seiten haben;

2) congruent, wenn sie völlig übereinstimmen, so daß sie sich, gehörig aufeinander gelegt, ganz decken;

3) gleich, wenn sie einerlei Flächeninhalt haben, ohne congruent zu sein;

4) ähnlich, wenn sie in Bezug auf ihre Form übereinstimmen, ohne gleich groß zu sein; endlich

5) isoperimetrisch, wenn sie gleichen Umfang haben.

I. Kap. Von der Congruenz der Figuren und den daraus abgeleiteten Wahrheiten.

§. 88.

Erkl. 1. Unter Congruenz versteht man die völlige Uebereinstimmung zweier Figuren, so daß, wenn man sie auf einander legt, die Grenzen der einen auf die der andern fallen (§. 87, 2.). —

Congruente Figuren müssen also a) **gleichnamig** sein, b) **alle Seiten** und c) **alle Winkel** der Ordnung nach gleich haben.

2. Jene Stücke (Seiten und Winkel), welche sich decken, wenn zwei congruente Figuren gehörig auf einander gelegt werden, nennt man **homolog** oder **gleichliegend**.

3. Die Fälle, in welchen aus der Gleichheit einiger (gegebener) Stücke die Gleichheit aller übrigen, d. i. die Congruenz zweier Figuren erwiesen werden kann, heißen **Congruenzfälle** oder **Kriterien der Congruenz**.

a) Theoretische Sätze.

§. 89.

Lehrs. (I. *) Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel beziehungsweise gleich haben; so sind sie congruent.

Dat. AB = DE, AC = DF und ∡ m = x (Fig. 38.).

Thes. △ ABC ≅ DEF.

Bew. Man denke sich das △ ABC so auf DEF gelegt, daß der Punkt A auf D, und die Seite AB auf DE fällt, so muß, weil AB = DE ist, der Punkt B auf E kommen (§. 18.), und, da ∡ m = x, auch AC auf DF (§. 30.); endlich, wegen AC = DF, fällt auch C auf F, und BC auf EF (§. 16.). Es decken sich also alle Grenzen beider Dreiecke; somit ist △ABC≅DEF.

Zus. 1. Folgt aus der Gleichheit gegebener Stücke die Congruenz zweier Dreiecke, so folgt daraus auch die Gleichheit der übrigen (nicht gegebenen) Stücke.

Zus. 2. In congruenten Dreiecken liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel, und den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Zus. 3. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn ihre Katheten beziehungsweise gleich sind (§. 31, Zus. 1.).

Zus. 4. Ein Dreieck ist durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt (§. 11.).

---

*) D. i. I. **Congruenzfall.** Die Bezeichnungen der vier Congruenzfälle für Dreiecke durch römische Ziffern werden in der Folge stets bei der häufigen Anwendung derselben gebraucht werden.

§. 90.

Lehrs. Haben zwei Dreiecke zwei Seiten beziehungsweise gleich, aber entweder I. die davon eingeschlossenen Winkel, oder II. die dritten Seiten ungleich; so liegt im I. Falle dem größern Winkel die größere Seite, im II. der größern Seite der größere Winkel gegenüber.

I. { Dat. AB = DE, BC = EF, ∡ ABC > DEF (Fig. 39.).
Thes. AC > DF.

Bew. Legt man das △ DEF so auf ABC, daß DE die Seite AB deckt, so fällt EF zwischen AB und BC (§. 30, Zus.), so daß △ DEF durch ABG vorgestellt, also AG = DF und BG = EF ist. Nun ist aber

$$\left.\begin{array}{l} AH + HG > AG \\ CH + BH > BC \end{array}\right\} \text{(§. 76, I.), daher auch}$$

$$\overline{AH + CH + HG + BH > AG + BC}, \text{ oder}$$

$$AC + BG > AG + BC; \text{ also } AC > DF,$$

weil BG = EF = BC, und AG = DF ist.

Fiele der Punkt F in die Seite AC, dann wäre offenbar DF nur ein Theil von AC, folglich AC > DF. Fiele endlich F in das △ ABC hinein, dann folgt AC > DF aus §. 79.

II. { Dat. AB = DE, BC = EF, AC > DF.
Thes. ∡ ABC > DEF.

Bew. Wäre die Behauptung unrichtig, so könnte nur ∡ ABC $\leqq$ DEF sein. Wäre aber ABC = DEF, so hätte man △ ABC ≅ DEF (I.), mithin auch AC = DF; wäre ∡ ABC < DEF, so müßte AC < DF sein (I. Fall). Beides ist gegen die Voraussetzung; folglich ist ∡ ABC > DEF.

§. 91.

Lehrs. (II.) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie alle drei Seiten der Ordnung nach gleich haben.

Dat. AB = DE, BC = EF, AC = DF (Fig. 38.).

Thes. △ ABC ≅ DEF.

Bew. Kann man zeigen, daß beide Dreiecke einen Winkel gleich haben, daß z. B. ∡ m = x ist, so ist der Satz (nach §. 89.) bewiesen.

Wäre ∡ m $\gtrless$ x, so müßte auch, da AB = DE und AC = DF

ist, $BC \gtreqless EF$ sein (§. 90, I.); was beides gegen die Voraussetzung $BC = EF$ streitet. Es ist also $\measuredangle m = x$, und daher $\triangle ABC \cong DEF$ (I.).

Zus. 1. Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Seite, zwei gleichschenklige, wenn sie die Basis und einen Schenkel gleich haben.

Zus. 2. Ein Dreieck ist durch seine drei Seiten bestimmt.

§. 92.

Lehrs. I. Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich, und umgekehrt II. ein Dreieck, welches zwei gleiche Winkel hat, ist gleichschenklig.

I. Dat. $AB = BC$. — Thes. $\measuredangle BAC = BCA$ (Fig. 40.).

Bew. Man verlängere die gleichen Seiten AB und BC um gleiche Stücke, d. h. mache $AD = CE$, und ziehe DC und AE, so ist auch

$BD = BE$, dann
$BC = BA$ (Dat.) und
$\measuredangle DBC = ABE$; also

$\triangle BDC \cong ABE$ (I.); mithin
$DC = AE$. Ferner ist
$AC = AC$, und
$AD = CE$ (Constr.); folglich

$\triangle ADC \cong ACE$ (II.); daher
$\measuredangle DAC = ACE$, mithin auch
$\measuredangle BAC = BCA$ (§. 32, Zus. 3.).

II. Dat. $\measuredangle BAC = BCA$. — Thes. $AB = BC$ (Fig. 41.).

Bew. Wäre die Behauptung unrichtig, so müßte $AB \lessgtr BC$ sein. Angenommen, es sei $AB < BC$, so könnte man auf BC ein Stück $BD = AB$ nehmen, und es wäre, wenn man noch AD zieht, $\measuredangle BAD = BDA$ (Nr. I.); da aber $\measuredangle BDA > BCA$ (§. 78, Zus. 1.), so hätte man auch $\measuredangle BAD > BCA$, folglich um so mehr $\measuredangle BAC > BCA$, was der Voraussetzung widerstreitet. Auf den gleichen Widerspruch führt die Annahme $AB > BC$; mithin ist $AB = BC$.

Zus. Im gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel gleich, mithin jeder $= \frac{2}{3} R = 60^0$; umgekehrt ist ein Dreieck, in

welchem alle drei Winkel gleich sind, gleichseitig. Das gleichseitige Dreieck ist also eine reguläre Figur.

Zus. 2. Ist im gleichschenkligen Dreiecke ein Winkel bekannt, so sind es auch die übrigen; denn bezeichnet man einen Winkel an der Basis durch α, den an der Spitze durch β, so ist $2\alpha + \beta = 2R$ (§. 77.); daher $\beta = 2(R - \alpha)$, und $\alpha = R - \frac{1}{2}\beta$. — Aus letzterer Gleichung folgt zugleich, daß jeder Winkel an der Basis $< R$; also beide stets spitz sind.

Zus. 3. Im rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke ist jeder Winkel an der Hypotenuse $= \frac{1}{2}R = 45^0$.

§. 93.

Lehrs. In jedem Dreiecke steht I. der größern Seite der größere Winkel, und umgekehrt II. dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

I. Dat. $BC > AC$. — Thes. $BAC > ABC$ (Fig. 42.).

Bew. Nimmt man auf der größern Seite BC ein Stück $CD = AC$, und zieht AD, so ist $\measuredangle m = n$ (§. 92, I.). Es ist aber $\measuredangle m > B$ (§. 78, Zus. 1.), also auch $\measuredangle n > B$; folglich um so mehr $\measuredangle BAC > ABC$.

II. Dat. $\measuredangle BAC > ABC$. — Thes. $BC > AC$.

Bew. Verzeichnet man (nach §. 40.) in dem größern $\measuredangle BAC$ den Winkel $BAD = B$, so entsteht das $\triangle BAD$, und in diesem ist $BD = AD$ (§. 92, II.). Da nun aber

$$AD + DC > AC \text{ (§. 76, I.), so ist auch}$$
$$BD + DC > AC, \text{ d. i. } BC > AC.$$

Zus. 1. Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse größer als jede der beiden Katheten; im stumpfwinkligen ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte.

Zus. 2. Sind alle Seiten eines Dreieckes ungleich, so sind es auch alle Winkel und umgekehrt.

§. 94.

Lehrs. Unter allen Geraden, welche von einem Punkte außerhalb einer andern Geraden an diese gezogen werden, ist die Senkrechte die kürzeste.

Dat. $AB \perp CD$. — Thes. $AB < AE$ (Fig. 43.).

Bew. Da $AB \perp CD$, ist ist $\measuredangle ABD = R$; also jede

andere beliebig angenommene Linie AE Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, folglich AB < AE (§. 93, Zus. 1.).

Zus. 1. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden ist also das Perpendikel von jenem auf diese (§. 17.).

Zus. 2. Schiefe Linien, die aus einem Punkte an eine Gerade gezogen werden, werden immer größer, je weiter ihre Treffungspunkte von dem der Senkrechten entfernt sind, und umgekehrt; denn die Winkel m, n sind stumpf, und zwar ist n > m > ABD (§. 78, Zus. 1.); also AD > AF > AE (§. 93, Zus. 1.).

§. 95.

Lehrs. (III.) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Seite und zwei gleichliegende Winkel beziehungsweise gleich haben.

Dat. AC = DF, m = x und p = z (Fig. 38.).

Thes. △ ABC ≅ DEF.

Bew. Man denke sich △ ABC so auf DEF gelegt, daß AC mit DF congruirt, so muß auch, wegen m = x, AB auf DE, und, wegen p = z, BC auf EF, und daher auch der Punkt B auf E fallen (§. 16, Zus. 4.). Die Grenzen beider Dreiecke decken sich also, folglich ist △ ABC ≅ DEF.

Wäre AC = DF, ∡ m = x und n = y gegeben, so bleibt der Beweis (vermöge §. 77, Zus. 5.) derselbe.

Zus. 1. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Kathete oder die Hypotenuse und einen spitzen Winkel beziehungsweise gleich haben.

Zus. 2. Ein Dreieck ist durch eine Seite und zwei Winkel bestimmt.

§. 96.

Lehrs. (IV.) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie zwei Seiten und die Winkel, welche den größern von ihnen gegenüberstehen, beziehungsweise gleich haben.

Dat. { AB = DE, AC = DF, ∡ B = E,
AC > AB, also auch DF > DE (Fig. 45.).

Thes. △ ABC ≅ DEF.

Bew. Legt man △ ABC so auf DEF, daß AB die Seite DE deckt, so fällt auch BC auf EF (§. 30.). Fiele nun der Punkt C nicht auf F, so könnte er nur 1) zwischen E und F, etwa in G,

oder 2) in die Verlängerung von EF, etwa in H fallen, also AC durch DG oder DH vorgestellt sein. Beides ist unmöglich; denn im erstern Falle hätte man $DG = AC = DF$, also wäre $\measuredangle n = p$ (§. 92, I.). Da nun $\measuredangle n > E$ (§. 78, Zus. 1.), so wäre auch $\measuredangle p > E$; und daher $DE > DF$ (§. 93, II.), was gegen die Voraussetzung $DF > DE$ ist. Auf denselben Widerspruch führt die Annahme des zweiten Falles; also fällt C auf F, mithin auch AC auf DF (§. 16.), beide Dreiecke decken sich somit.

Zus. 1. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete beziehungsweise gleich haben.

Zus. 2. Ein Dreieck ist durch zwei Seiten und den der größern von ihnen gegenüberstehenden Winkel bestimmt.

§. 97.

Lehrs. Wird eine gerade Linie von der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes an die Basis so gezogen, daß sie I. den Winkel an der Spitze halbirt, so steht sie auf der Basis senkrecht, und halbirt dieselbe; II. daß sie den Halbirungspunkt der Basis trifft, so steht sie auf letzterer senkrecht und halbirt den Winkel an der Spitze; III. daß sie auf der Basis senkrecht steht (Höhe des Dreieckes ist), so halbirt sie die Basis und den Winkel an der Spitze.

Dat. $\begin{cases} AB = BC, \text{ ferner I. } \measuredangle x = y = \frac{1}{2} ABC, \\ \text{II. } AD = DC = \frac{1}{2} AC, \text{ und III. } BD \perp AC \text{ (Fig. 44.)}. \end{cases}$

Thes. $\begin{cases} \text{I. } BD \perp AC;\ AD = DC = \frac{1}{2} AC. \\ \text{II. } BD \perp AC;\ \measuredangle x = y = \frac{1}{2} ABC. \\ \text{III. } AD = DC = \frac{1}{2} AC;\ \measuredangle x = y = \frac{1}{2} ABC. \end{cases}$

Bew. Für jeden der drei Fälle läßt sich mittelst eines der Congruenzfälle leicht beweisen, daß $\triangle ABD \cong BCD$ ist, woraus dann die jedesmaligen Behauptungen folgen.

Zus. 1. Die Senkrechte, welche im Halbirungspunkte der Basis eines gleichschenkligen Dreieckes errichtet wird, geht durch dessen Spitze; denn ginge sie nicht durch dieselbe, so müßte es, da $BD \perp AC$ (Nr. II.), in D zwei Senkrechte auf AC geben, was unmöglich ist (§. 31.).

Zus. 2. Wird die Basis eines Dreieckes durch die Höhe halbirt, so ist es gleichschenklig. Denn wenn $BD \perp AC$, und $AD = DC$, so ist $\triangle ABD \cong BCD$ (§. 89, Zus. 3.); folglich $AB = BC$.

Zus. 3. Ist im Halbirungspunkte einer geraden Linie ein Loth errichtet, so ist jeder in demselben angenommene Punkt von den Endpunkten der gegebenen Linie gleichweit entfernt (Zus. 2.).

§. 98.

Lehrs. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich.

Dat. AB ╫ CD, und BC ╫ AD (Fig. 46.).

Thes. AB = CD, und BC = AD.

Bew. Zieht man eine Diagonale AC, so hat man

AC = AC, dann

∡ m = n, und ∡ y = x (§. 45, II.); daher

△ ABC ≅ ADC (III.); mithin auch

AB = CD, und BC = AD.

Zus. 1. Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale halbirt; denn es ist △ABC≅ADC.

Zus. 2. Parallellinien zwischen Parallelen sind einander gleich; denn das von ihnen eingeschlossene Viereck ist ein Parallelogramm.

Zus. 3. Alle Perpendikel zwischen Parallellinien sind gleich (Zus. 2. und §. 43, Zus. 2.).

Zus. 4. Parallele Linien sind daher überall gleichweit von einander entfernt, und zwar ist der Abstand zweier Parallelen die Senkrechte, welche aus irgend einem Punkte der einen auf die andere gezogen wird.

§. 99.

Lehrs. Wenn in einem Vierecke I. jedes Paar gegenüberstehender Seiten gleich, oder II. nur ein Paar derselben parallel und gleich ist; so ist dasselbe ein Parallelogramm.

I. { Dat. AB = CD, und BC = AD (Fig. 46.).
Thes. AB ╫ CD, „ BC ╫ AD.

Bew. Man ziehe eine Diagonale AC, so ist △ABC≅ACD (II.), also auch ∡m=n, daher AB╫CD, ebenso ∡y=x, und deßhalb BC╫AD (§. 43, II.).

II. Dat. AB ╪ CD. — Thes. BC ╫ AD.

Bew. Zieht man AC, so ist, wegen AB ╪ CD, auch ∡m = n, dann AC=AC, das △ABC≅ACD (I.); also auch ∡y=x, und daher BC╫AD (§. 43, II.).

§. 100.

Erkl. Ein Parallelogramm erhält in Hinsicht auf seine Seiten und Winkel eine besondere Benennung, und zwar heißt dasselbe

1) Quadrat, wenn zwei anliegende (also alle) Seiten gleich sind, und ein Winkel (mithin jeder) = R ist;

2) Rhombus oder Raute (auch verschobenes Quadrat genannt), wenn alle Seiten gleich, die Winkel aber schief sind;

3) Rechteck (Oblong oder Rektangel), wenn die anstoßenden Seiten ungleich, die Winkel aber rechte sind;

4) Rhomboid oder länglichte Raute, wenn die anstoßenden Seiten ungleich, und die Winkel schief sind.

Zus. 1. Ein Parallelogramm (Rhomboid), welches nur einen rechten Winkel hat, ist ein Rechteck (§. 82, Zus.); ein Rechteck, in welchem zwei anstoßende Seiten gleich sind, ist ein Quadrat.

Zus. 2. Das Quadrat ist eine reguläre Figur.

§. 101.

Lehrs. Die beiden Diagonalen eines Parallelogrammes halbiren sich gegenseitig.

Dat. AB $\#$ CD, und BC $\#$ AD (Fig. 47.).

Thes. $AE = CE = \frac{1}{2}AC$; $BE = DE = \frac{1}{2}BD$.

Bew. Vergleicht man zwei der gegenüberliegenden Dreiecke, z. B. AED und BEC, so ist in denselben
AD = BC (§. 98.), dann $\measuredangle\, y = x$ und $\measuredangle\, n = m$ (§. 45, II.), daher $\triangle$ AED $\cong$ BEC (III.); also auch

$AE = CE = \frac{1}{2}AC$, und $DE = BE = \frac{1}{2}BD$.

Zus. 1. Im Quadrat und Rechtecke sind die beiden Diagonalen einander gleich (§. 89, Zus. 3.).

Zus. 2. Im Quadrate und Rhombus stehen die Diagonalen auf einander senkrecht und halbiren die Winkel. Denn es ist (Fig. 48.) das $\triangle$ BAD gleichschenklig, dann BE = DE (Lehrs.); mithin AC $\perp$ BD, und $\measuredangle\, x = y = \frac{1}{2}BAD$ (§. 97, II.).

Anm. Der Punkt, in welchem sich die Diagonalen eines Parallelogrammes schneiden, heißt dessen Mittelpunkt.

§. 102.

Lehrs. Parallelogramme sind congruent, wenn sie zwei anliegende Seiten, und den davon eingeschlossenen Winkel beziehungsweise gleich haben.

Dat. AB = EF, AD = FG, $\measuredangle$ m = n (Fig. 49.).

Thes. AC $\cong$ FH.

Bew. Legt man Prlgr. AC so auf FH, daß AB und EF sich decken, so fällt auch AD ganz auf FG (§. 30. und §. 18.), ferner BC auf EH, und DC auf GH (§. 48.); folglich auch C auf H (§. 16, Zus. 4.); beide Figuren sind somit congruent.

Zus. 1. Zwei Rechtecke sind congruent, wenn sie zwei anliegende Seiten; zwei Rhomben, wenn sie eine Seite und einen Winkel; Quadrate, wenn sie nur eine Seite gleich haben.

Zus. 2. Ein Parallelogramm ist durch zwei anstoßende Seiten und ihren Zwischenwinkel; ein Rechteck durch zwei anliegende Seiten; ein Rhombus durch eine Seite und einen Winkel; ein Quadrat durch eine Seite bestimmt.

§. 103.

Lehrs. Werden zwei congruente Polygone durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke zerlegt; so sind diese der Ordnung nach congruent.

Dat. ABCDE $\cong$ FGHKL (Fig. 50.).

Thes. $\triangle$ ADE $\cong$ FKL; ABD $\cong$ FGK ꝛc.

Bew. Da beide Polygone congruent sind, so ist auch AE=FL, DE=KL, $\measuredangle$ E = $\measuredangle$ L; daher $\triangle$ AED $\cong$ FLK (I.), dann AD = FK und $\measuredangle$ m = x.

Ferner ist $\measuredangle$ BAE = GFL, und $\measuredangle$ m = x, daher

$\measuredangle$ BAE − m = GFL − x, d. i. $\measuredangle$ n = y, dann

AB = FG, und AD = FK; mithin $\triangle$ ABD $\cong$ FGK (I.) ꝛc.

Zus. 1. Sind umgekehrt zwei Polygone durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke zerlegt, welche der Ordnung nach congruent sind; so sind die Polygone selbst congruent.

Zus. 2. Gleichnamige reguläre Polygone sind congruent, sobald sie nur eine Seite gleich haben (vgl. §. 85, Zus. 3.).

b) Praktische Sätze.

§. 104.

Aufg. Aus drei gegebenen Geraden, von denen je zwei zusammen größer sind, als die dritte, ein Dreieck zu construiren.

Aufl. Die drei Linien seien a, b, c (Fig. 51.). Man nehme eine Gerade $AB = a$, und beschreibe aus A mit dem Radius b; aus B mit dem Radius c Kreisbögen, die sich in C schneiden; so ist, wenn man AC und BC zieht, ABC das verlangte Dreieck.

Bew. Der Construction gemäß ist $AB = a$, $BC = c$ und $AC = b$, d. h. die drei gegebenen Linien sind Seiten des Dreieckes, welches zugleich durch sie bestimmt ist (§. 91. Zus. 2.).

Daß die aus A und B mit den Linien b und c beschriebenen Bogen sich schneiden, läßt sich auf folgende Art darthun: Verlängert man die Linie AB, bis sie den um B beschriebenen Kreis in F trifft, so hat man

$AB + BC > AC$ (Voraussetzung), oder

$AB + BF > AE$ (§. 21, Zus. 1.), d. i.

$AF > AE$.

Der Punkt F des Kreises um B liegt also außerhalb des Kreises um A.

Ferner ist $AB < BC + AC$ (Dat.); daher

$AB - BC < AC$, oder

$AB - BD < AE$, d. i.

$AD < AE$.

Der Punkt D des um B beschriebenen Kreises liegt somit innerhalb des Kreises um A; also schneiden sich beide Kreise (§. 72, Zus. 2.).

Zus. 1. Auf dieselbe Art läßt sich mit zwei Linien (einem Schenkel und der Basis) ein gleichschenkliges Dreieck construiren, wenn der gegebene Schenkel größer ist als die halbe Basis; ferner mit (oder über) einer Linie ein gleichseitiges Dreieck.

Zus. 2. Ebenso kann man ein gegebenes Dreieck nachzeichnen, d. h. ein Dreieck construiren, welches mit einem gegebenen congruent ist (§. 91, Zus. 2.).

§. 105.

Aufg. Eine gegebene gerade Linie zu halbiren.

Aufl. Man beschreibe (Fig. 52.) aus den Endpunkten der gegebenen Linie AB Bögen mit beliebigem Radius, die sich in C, dann mit einem andern Radius Bögen, die sich in D schneiden, und ziehe durch die Punkte C und D eine Gerade CE; so wird diese (gehörig verlängert) AB in dem Punkte E halbiren.

Bew. Zieht man AC, BC; AD und BD, so hat man $\triangle ACD \cong BCD$ (II.), folglich auch $\angle ACE = BCE$, und daher $AE = BE = \frac{1}{2} AB$ (§. 97, I.).

Zus. 1. Durch fortgesetztes Halbiren kann AB in 4, 8, 16.... überhaupt 2^n gleiche Theile getheilt werden.

Zus. 2. Zieht man durch die Spitzen zweier gleichschenkliger Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Basis haben, eine gerade Linie, so halbirt diese a) die Winkel an der Spitze, b) die Basis, und steht c) auf letzterer senkrecht.

§. 106.

Aufg. Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Aufl. Man beschreibe (Fig. 53.) aus der Spitze des gegebenen Winkels ABC mit beliebigem Radius einen Bogen, der die Schenkel in D und E schneidet; ebenso aus D und E Bögen, die sich in F schneiden; so ist durch die Gerade BF der $\measuredangle$ ABC halbirt.

Bew. Zieht man DF und EF, so ist $\triangle$ BDF $\cong$ BEF (II.); daher auch $\measuredangle$ n = m = $\frac{1}{2}$ ABC.

Zus. Durch fortgesetztes Halbiren kann jeder Winkel in 2^n gleiche Theile getheilt werden.

§. 107.

Aufg. Auf eine gerade Linie in einem gegebenen, in ihr liegenden Punkte C (Fig. 54.) eine Senkrechte zu errichten.

Aufl. Man schneide aus C die Stücke CD = CE ab, beschreibe aus D und E mit einerlei Radius Bögen, die sich in F schneiden, und ziehe durch C und F die Gerade CG; so ist CG $\perp$ AB.

Bew. Zieht man DF und EF, so ist $\triangle$ DFE gleichschenklig, und DC = CE = $\frac{1}{2}$ DE; also CG $\perp$ AB (§. 97, II.).

§. 108.

Aufg. Aus einem gegebenen Punkte C (Fig. 55.) auf eine Gerade AB ein Perpendikel zu fällen (herabzulassen).

Aufg. Man nehme in AB einen beliebigen Punkt D, beschreibe mit CD einen Bogen, welcher AB (oder deren Verlängerung) noch in E schneidet, dann aus D und E Bögen, die sich in G schneiden; so ist die durch C und G gezogene Gerade CF $\perp$ AB.

Bew. Zieht man CD und CE, so ist CD = CE, ferner $\measuredangle$ DCE halbirt (§. 106).; daher CF $\perp$ AB (§. 97, I.)

Anm. Mechanisch werden diese und die vorhergehende Aufgabe gewöhnlich mittelst des sogenannten Winkelhackens (oder eines aus Holz oder Messing gefertigten rechtwinkligen Dreieckes) gelöst. (Prüfung desselben §. 220, Anm.)

§. 109.

Aufg. In einem Endpunkte einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten (einen rechten Winkel zu construiren).

Aufg. Man verzeichne (Fig. 56.) über der gegebenen Linie AB (oder einem beliebigen Stücke derselben) ein gleichschenkliges $\triangle$ ACB, verlängere den Schenkel BC so, daß die Verlängerung $CD = AC$ wird; so ist die Gerade $AD \perp AB$.

Bew. Da $CD = AC = BC$ (Constr.), so ist $\measuredangle m = x$ und $n = y$ (§. 92, I.); also auch $\measuredangle m + n = x + y = DAB$.

Ferner ist $\measuredangle m + n + DAB = 2R$ (§. 77.), oder

$$2 . DAB = 2R; \text{ also}$$

$$\measuredangle DAB = R, \text{ und } AD \perp AB.$$

Anm. Wie könnte diese Aufgabe auch nach §. 108. gelöst werden?

§. 110.

Aufg. Aus zwei gegebenen Linien a und b (Fig. 57.) und einem Winkel α ein Parallelogramm zu construiren.

Aufl. u. Bew. Man nehme $AC = b$, construire an AC den $\measuredangle BAC = \alpha$, mache $AB = a$, beschreibe aus B mit dem Radius AC, ebenso aus C mit dem Halbmesser AB Kreisbögen, die sich in D schneiden, und ziehe endlich BD und CD; so ist AD das verlangte Parallelogramm (§. 99, I.). Daß die aus B und C beschriebenen Bogen sich schneiden, folgt, wenn man die Diagonale BC zieht, leicht aus §. 76. und §. 104.

Zus. Auf dieselbe Art läßt sich mit zwei Linien und dem eingeschlossenen Winkel ein Dreieck; mit zwei Linien ein Rechteck und rechtwinkliges Dreieck; mit einer Linie ein Quadrat construiren.

§. 111.

Aufg. Ein gegebenes Polygon nachzuzeichnen, d. h. ein Polygon zu construiren, das mit einem gegebenen congruent ist.

Aufl. u. Bew. Man zerlege das Vieleck durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, in Dreiecke, und verzeichne diese der Ordnung nach; so erhält man das verlangte Polygon (§. 103, Zus. 1.).

II. Kap. Von der Gleichheit der Figuren.

§. 112.

Erkl. Unter Gleichheit der Figuren versteht man ihre Uebereinstimmung in Hinsicht auf Quantität (Flächeninhalt).

Zus. Figuren können also einander gleich sein, ohne daß sie congruent sind, nicht aber umgekehrt.

§. 113.

Erkl. Parallelogramme und Dreiecke liegen zwischen Parallelen, wenn ihre Grundlinien in der einen, und bei den erstern die Gegenseiten, bei den letztern die Spitzen in der andern Parallelen liegen.

Zus. 1. Parallelogramme und Dreiecke, die zwischen Parallelen liegen, haben gleiche Höhe (§. 98, Zus. 3.).

Zus. 2. Parallelogramme und Dreiecke von gleichen Höhen lassen sich immer zwischen Parallelen liegend denken.

Zus. 3. Dreiecke mit gemeinsamer Spitze, deren Grundlinien in einer Geraden liegen, haben dieselbe Höhe (§. 46.).

a) Theoretische Sätze.

§. 114.

Lehrs. Parallelogramme, welche auf derselben Grundlinie stehen und zwischen Parallelen liegen (also gleiche Höhe haben), sind einander gleich.

Dat. CF ⧺ AB. — Thes. Prlg. BC = AF (Fig. 58.).

Bew. Es mögen die der gemeinschaftlichen Basis (AB) gegenüberstehenden Seiten zum Theil aufeinander oder (wie in der Figur) ganz außer einander liegen, oder nur zusammenstoßen; so ist für alle Fälle, wegen BD ⧺ AC und BF ⧺ AE:

∡ DBF = CAE (§. 49.), ferner
BD = AC und BF = AE (§. 98.); mithin

$\triangle$ DBF ≅ ACE (I.); folglich auch

Trap. ACFB − $\triangle$ DBF = ACFB − $\triangle$ ACE, d. i.

Prlg. BC = AF.

Zus. 1. Parallelogramme, welche gleiche Basis und Höhe haben, sind einander gleich.

Zus. 2. Jedes Parallelogramm ist einem Rechtecke gleich, welches dessen Basis und Höhe als anstoßende Seiten hat.

§. 115.

Lehrs. Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes, welches mit ihm dieselbe (oder gleiche) Basis und Höhe hat.

Dat. AD $\#$ BC. — Thes. $\triangle ABC = \frac{1}{2} BD$ (Fig. 46.).

Bew. Es ist $\triangle ABC = ADC$ (§. 98, Zus. 1.), ferner

$$\triangle ABC + ADC = 2 . ABC = \text{Prlg. } BD;$$ daher

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} BD.$$

Zus. 1. Dreiecke von einerlei oder gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich; denn jedes ist die Hälfte eines Parallelogrammes mit der gleichen Basis und Höhe.

Zus. 2. Jedes Dreieck ist einem rechtwinkligen gleich, welches die Basis und Höhe desselben als Katheten hat.

Zus. 3. Mehrere Dreiecke von gleicher Höhe sind zusammen einem Dreiecke gleich, das dieselbe Höhe, aber die Summe der Grundlinien jener Dreiecke als Basis hat. Denn ist (Fig. 59.) $AG = AC + CE + EG$, und man nimmt in der Geraden BF $\#$ AG (§. 113, Zus. 2.), den Punkt L beliebig an, zieht AL und GL, ferner CL und EL; so ist

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC = ALC \\ \triangle CDE = CLE \\ \triangle EFG = ELG \end{array}\right\}$$ (Zus. 1.); daher auch

$$\triangle ABC + CDE + EFG = ALC + CLE + ELG, \\ = ALG.$$

Anm. Dieser Satz gilt auch für Parallelogramme von gleicher Höhe.

§. 116.

Lehrs. Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogrammes zu den Seiten desselben parallele Linien, so entstehen vier Parallelogramme, von denen jene zwei, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich sind.

Dat. FG $\#$ AD, und HK $\#$ AB (Fig. 60.).

Thes. Prlg. $BE = DE$.

Bew. Es ist $\triangle$ ABC = ADC (§. 98, Zus. 1.), ebenso
$\triangle$ CEK = CEG, und
$\triangle$ AEF = AEH; daher auch

$\triangle$ ABC — CEK — AEF = ADC — CEG — AEH, d. i.
Prlg. BE = DE.

Anm. Man nennt die beiden Parallelogramme BE und DE, durch welche die Diagonale nicht geht, Ergänzungen an der Diagonale, die beiden andern, FH und GK aber Parallelogramme um die Diagonale.

§. 117.

Lehrs. Wird eine gerade Linie in zwei (beliebige) Theile getheilt; so ist das über dieser Linie construirte Quadrat gleich der Summe der Quadrate über den beiden Stücken, mehr dem doppelten Rechtecke, welches mit den beiden Stücken construirt wird.

Dat. AB = AC + BC (Fig. 61.).

Thes. *) $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2AC.BC$.

Bew. Man construire über der in C getheilten Linie AB das Quadrat AE, ziehe durch C die Gerade CF ‡ AD, mache AG = AC, und ziehe GH ‡ AB, welche CF in K schneidet; so sind die Vierecke, in welche dadurch das Quadrat getheilt wird, sämmtlich Rechtecke (§. 100, Zus. 1.).

Da nun AG = AC, so ist AK ein Quadrat (§. 100, Zus. 1.), und zwar über dem Stücke AC; also 1) AK = $\overline{AC}^2$.

Weil AB = AD und AC = AG, so ist auch BC = DG. Es ist aber BC = EF, und DG = EH (§. 98, Zus. 2.), also auch KE ein Quadrat, und zwar über einer dem Stücke BC gleichen Linie; mithin 2) KE = $\overline{BC}^2$.

Weil endlich DG = BC und GK = CK = AC ist, so sind BK und DK zwei gleiche mit den Stücken AC und BC construirte Rechtecke; daher 3) BK + DK = 2AC.BC.

Durch Addition der Gleichungen 1), 2) und 3) ergibt sich somit:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2AC.BC.$$

*) Wir bezeichnen ein Quadrat, dessen Seite AB ist, mit $\overline{AB}^2$; ebenso ein Rechteck, dessen anliegende Seiten AC und BC sind, durch AC.BC. Der Grund hievon später (§. 173, Zus. 1. und 2.).

§. 118.

Lehrs. Theilt man eine gerade Linie in zwei Stücke; so ist das Quadrat über einem Stücke gleich der Summe der Quadrate über der ganzen Linie und dem andern Stücke, weniger dem doppelten Rechtecke aus der ganzen Linie und dem andern Stücke.

Dat. $AC = AB - BC$ (Fig. 62.).

Thes. $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB.BC.$

Bew. Man construire über AB das Quadrat AE, ziehe durch C die Gerade CF ‡ AD, mache $AG = AC$, und ziehe GH ‡ AC; dann verlängere man ED so, daß die Verlängerung $DK = EF = BC$ wird, und construire über $DK = DG$ das Quadrat $DL = \overline{BC}^2$; so ist offenbar

$$\overline{AC}^2 = AE + DL - CE - LF$$
$$= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - BE.BC - KF.FH$$
$$= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB.BC,$$

indem $BE = AB$, dann $KF = DK + DF = BC + AC = AB$, und $FH = DG = BC$ ist.

§. 119.

Lehrs. Theilt man eine Gerade in zwei Stücke; so ist der Unterschied der Quadrate über der ganzen Linie und einem Stücke derselben dem Rechtecke gleich, das mit der Summe und Differenz aus der ganzen Linie und diesem Stücke construirt wird.

Dat. $AB = AC + BC$ (Fig. 63.).

Thes. $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = (AB + AC).(AB - AC).$

Bew. Man construire wieder wie §. 118., nur mit dem Unterschiede, daß man GH noch bis M verlängert, und $DK = AC$ macht, wodurch man das Rechteck $DL = CM$ erhält; so ist

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = GE + CM,$$
$$= GE + DL = EL = EK.EM$$
$$= (AB + AC)(AB - AC),$$

weil $EK = ED + DK = AB + AC$, und $EM = BE - BM = AB - AC$ ist.

Anm. Welche arithmetischen Sätze sind durch die drei eben erwiesenen (§§. 117 — 119.) sinnbildlich dargestellt?

§. 120.

Lehrs. Im rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Dat. $\measuredangle$ ABC = R (Fig. 64.).

Thes. $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. *)

Bew. Man ziehe aus der Spitze des rechten Winkels die Linie BK ⫲ AD ⫲ CE, so ist BK ⊥ AC (§. 45, Zus. 2.); also das Quadrat über AC durch LK in die beiden Rechtecke AK und CK getheilt. Zieht man nun BD und FC; so hat man AB = AF, AD = AC, $\measuredangle$ m = n = R, daher auch $\measuredangle$ m + p = n + p oder $\measuredangle$ BAD = FAC; mithin $\triangle$ BAD ≅ FAC (I.).

Es ist aber $\triangle$ BAD = $\frac{1}{2}$AK (§. 115.), ebenso

$\triangle$ FAC = $\frac{1}{2}$AG = $\frac{1}{2}\overline{AB}^2$; daher auch

$\frac{1}{2}$AK = $\frac{1}{2}\overline{AB}^2$, oder,

da zu gleichen Hälften auch gleiche Ganze gehören,

1) AK = $\overline{AB}^2$. — Ebenso folgt 2) CK = $\overline{BC}^2$, wenn man die Punkte B und E, dann A und J durch gerade Linien verbindet.

Addirt man die Gleichungen 1) und 2), so erhält man:

$$AK + CK = \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Zus. 1. Im rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über einer Kathete gleich der Differenz zwischen den Quadraten über der Hypotenuse und der andern Kathete. Denn es ist

AK = AE — CK, d. i. $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$, ebenso
CK = AE — AK, oder $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$.

Zus. 2. Fällt man aus der Spitze des rechten Winkels die Senkrechte auf die Hypotenuse; so ist das Quadrat über einer Kathete einem Rechtecke gleich, das mit der ganzen Hypotenuse und jenem Segmente derselben construirt wird, welches an jene Kathete anstoßt. Denn es ist (Bew. des Lehrs. Nr. 1. und 2.)

$\overline{AB}^2$ = AK = AD . AL = AC . AL, und
$\overline{BC}^2$ = CK = CE . CL = AC . CL.

*) Dieser Satz wird seinem Erfinder (Pythagoras 586 v. Chr.) zu Ehren der Pythagoräische Lehrsatz, und wegen seiner Wichtigkeit **Magister Matheseos** genannt.

Zus. 3. Das Quadrat über dem Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse ist einem Rechtecke gleich, das mit den beiden Segmenten der letztern construirt wird. Denn ist (Fig. 65.) $\measuredangle ABC = R = BLC$, und man construirt über AC das Quadrat AE, verlängert BL bis K, macht dann $LM = CN = CL$, und zieht MN; so hat man

$$\begin{aligned} \overline{BL}^2 &= \overline{BC}^2 - \overline{CL}^2 \text{ (Zus. 1.)} \\ &= CK - LN \text{ (Zus. 2. und Constr.)} \\ &= NK = EK.EN \\ &= CL.AL, \end{aligned}$$

indem $EK = CL$, und $EN = CE - CN = AC - CL = AL$ ist.

§. 121.

Lehrs. Ist in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern; so ist das Dreieck rechtwinklig.

Dat. $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$. — Thes. $\measuredangle BDC = R$ (Fig. 44.).

Bew. Man errichte in D auf BD die Senkrechte $AD = DC$, und ziehe AB, so ist

$$\begin{aligned} &\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2, \text{ aber auch} \\ &\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \text{ (Dat.), mithin, wegen } AD = DC, \\ &\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2, \text{ und } AB = BC \text{ (§. 102, Zus. 1.; daher} \\ &\triangle ABD \cong BDC \text{ (II.); folglich auch} \\ &\measuredangle \alpha = \beta = R, \text{ da } \alpha = R \text{ ist (Constr.).} \end{aligned}$$

§. 122.

Lehrs. In einem stumpfwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über der Gegenseite des stumpfen Winkels gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten, mehr dem doppelten Rechtecke, das mit einer dieser letztern und ihrer Verlängerung bis zur Höhe construirt wird.

Dat. $\measuredangle ABC > R$, und $AD \perp CD$ (Fig. 66.).

Thes. $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC.BD$.

Bew. Wegen $AD \perp CD$ ist $\measuredangle ADC = R$, also

$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$ (§. 120.). Nun ist aber

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$ (§. 120, Zus. 1.), und

$\overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC.BD$ (§. 117.); also

$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC.BD$, d. i.

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC.BD$.

§. 123.

Lehrs. In jedem schiefwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über der Gegenseite eines spitzen Winkels gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern, weniger dem doppelten Rechtecke, das mit einer dieser letztern und jenem durch die Höhe von ihr gemachten Abschnitte construirt wird, welcher mit der erstern Seite nicht zusammenstoßt.

Dat. $\measuredangle ACB < R$, und $BD \perp AC$ (Fig. 30.).

Thes. $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC.DC$.

Bew. Da $BD \perp AC$, so hat man $\measuredangle ADB = R$, also

$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$ (§. 120.); es ist aber

$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$ (§. 120, Zus. 1.), und

$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 - 2AC.CD$ (§. 118.); also

$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC.CD$.

b) Praktische Sätze.

§. 124.

Erkl. 1. Eine Figur verwandeln heißt eine andere construiren, welche ihr an Inhalt gleich ist, ohne mit ihr congruent zu sein.

2. Die Verwandlung einer geradlinigen Figur in ein gleich großes Quadrat nennt man Quadratur, und zwar geometrische, wenn sie durch Verzeichnung geschieht.

§. 125.

Aufg. Es soll ein Dreieck in ein anderes verwandelt werden, das einen gegebenen Winkel hat.

Aufl. u. Bew. Man ziehe (Fig. 67.) durch die Spitze B des gegebenen Dreieckes ABC eine Parallele zu AC, construire an AC in A den gegebenen $\measuredangle \alpha$ (§. 40.), dessen anderer Schenkel so lange

gemacht wird, bis er die Parallele in D trifft; so ist, wenn man noch DC zieht, △ ADC das verlangte (§. 115, Zus. 1.).

Zus. 1. Soll ein △ ABC in ein gleiches rechtwinkliges verwandelt werden, so zieht man gleichfalls DB ∦ AC, errichtet in A die Gerade AE ⊥ AC und zieht CE (§. 115, Zus. 2.).

Zus. 2. Auf ähnliche Art läßt sich ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebenem Winkel, oder in ein Rechteck (Zus. 1.) verwandeln.

§. 126.

Aufg. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln.

Aufl. und Bew. Man ziehe (Fig. 68.) durch die Spitze B eine Gerade BN ∦ AC, halbire die Basis AC, errichte im Halbirungspunkte D die Linie DE ⊥ AC, und ziehe AE und CE, so ist △ AEC das gesuchte (§. 97, Zus. 2. und §. 115, Zus. 1.).

§. 127.

Aufg. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Linie als Seite hat.

Aufl. Wir unterscheiden hier folgende zwei Fälle:

I. Ist die gegebene Linie MN (Fig. 69.) größer als die Basis des Dreieckes ABC, so verlängere man diese so, daß AD = MN wird, ziehe DB, und durch C die Linie CE ∦ BD, endlich noch DE; so ist △ AED das verlangte.

II. Ist △ AED und die Linie PQ < AD gegeben, so mache man AC = PQ, ziehe CE, und durch D eine zu CE parallele, welche die verlängerte AE in B trifft, endlich noch CB; so ist △ ABC das verlangte.

Bew. Da BD ∦ CE, so ist (nach §. 113, Zus. 1. und §. 115, Zus. 1.):

$$\triangle\, DCE = BEC, \text{ also auch}$$

$$\triangle\, AEC + DCE = AEC + BEC, \text{ d. i.}$$

$$\triangle\, AED = ABC.$$

Zus. Mittelst dieser Aufgabe und §. 125. läßt sich nun auch jedes Dreieck in ein anderes mit gegebener Seite und gegebenem Winkel verwandeln.

§. 128.

Aufg. Zwei Dreiecke von ungleicher Höhe in eines zu verwandeln.

Aufl. Man lege (Fig. 70.) die beiden gegebenen Dreiecke ABC und CDE so aneinander, daß ihre Grundlinien eine Gerade AE ausmachen, ziehe durch die Spitze D des einen $DF \parallel AE$, dann AF, ferner durch B eine Parallele zu AF, welche die Verlängerung von AC in G schneidet, endlich EF und FG; so ist $\triangle EFG$ das verlangte.

Bew. Da $BG \parallel AF$, so ist $\triangle AFG = AFB$, daher auch

$\triangle AFG + AFC = AFB + AFC$, d. i.

$\triangle GFC = ABC$; ferner ist, wegen $DF \parallel CE$,

$\triangle CFE = CDE$, somit durch Addition

$\triangle GFE = ABC + CDE$.

§. 129.

Aufg. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches eine gegebene Linie als Seite hat.

Aufl. u. Bew. Man verlängere eine Seite des gegebenen Parallelogrammes BE (Fig. 60.), z. B. BK, so, daß die Verlängerung KC der gegebenen Linie gleich wird, ziehe dann durch die Punkte C und E eine Gerade, welche die Verlängerte BF in A trifft, construire mit BC und BA das Parallelogramm BD und verlängere FE bis G, und KE bis H; so ist ED das verlangte Parallelogramm. Denn es sind BE und DE die Ergänzungen an der Diagonale des Parallelogrammes BD (§. 116.).

Zus. Soll also ein Parallelogramm in ein Rechteck mit gegebener Seite verwandelt werden, so verwandle man dasselbe zuerst in ein Parallelogramm mit dieser Seite, und dieses dann (nach §. 125, Zus. 2.) in ein Rechteck, oder umgekehrt.

§. 130.

Aufg. Es soll I. ein Parallelogramm in ein Dreieck mit gleicher Höhe verwandelt werden, und II. umgekehrt.

Aufl. I. Man verdopple die Basis des gegebenen Parallelogrammes, mache also (Fig. 71.) $CE = BC$, und ziehe AE; so ist $\triangle ABE =$ Prlg. BD.

II. Man halbire die Basis BE des $\triangle ABE$ in C, ziehe durch C zu AB, und durch A zu BE parallele Linien, die sich in D schneiden; so ist BD das verlangte Parallelogramm.

Bew. Für beide Fälle ist, wegen AD ⫲ CE,

$\triangle$ CFE ≌ AFD (III.). Addirt man beiderseits

Tr. ABCF = ABCF; so folgt

$\triangle$ ABE = Prlg. BD.

§. 131.

Aufg. Ein Trapezium in ein Parallelogramm mit gleicher Höhe zu verwandeln.

Aufl. Man halbire (Fig. 72.) eine der beiden nicht parallelen Seiten, z. B. CD in E, und ziehe durch E eine zu AB parallele Linie, welche die verlängerte Seite BC in G schneidet; so ist AG das gesuchte Parallelogramm.

Bew. Es ist AG ein Parallelogramm (§. 80, 2.), ferner $\triangle$ CEG ≌ DEF (III.); addirt man beiderseits ABCEF, so folgt Prlg. AG = Tr. AC.

§. 132.

Aufg. Ein Trapezium in ein Dreieck von gleicher Höhe zu verwandeln.

Aufl. Man verlängere (Fig. 73.) die eine Parallele AD so, daß die Verlängerung gleich der anderen, also AE = AD + BC wird, und ziehe BE; so ist $\triangle$ BAE = Tr. AC.

Bew. Es ist $\triangle$ DEF ≌ BCF (III.); mithin auch

$\triangle$ DEF + BADF = BCF + BADF, d. i.

$\triangle$ BAE = Tr. AC.

§. 133.

Aufg. Ein Trapezoid in ein Dreieck zu verwandeln.

Aufl. Es sei ABCD (Fig. 74.) das zu verwandelnde Trapezoid. Man ziehe eine Diagonale BD und zu ihr durch eine gegenüberliegende Ecke C eine Parallele, welche die Verlängerung von AD in E trifft, dann BE; so ist $\triangle$ ABE das verlangte.

Bew. Es ist, wegen CE ⫲ BD, das

$\triangle$ BDE = BDC (§. 115, Zus. 1.), folglich auch

$\triangle$ BDE + ABD = BDC + ABD, d. i.

$\triangle$ ABE = ABCD.

§. 134.

Aufg. Eine beliebige geradlinige Figur (mit ausspringenden Winkeln) in ein Dreieck zu verwandeln.

Aufl. Die zu verwandelnde Figur sei (Fig. 75.) das Sechseck ABCDEF. Man ziehe eine Diagonale AC, durch welche ein Dreieck ABC abgeschnitten wird, dann durch B eine zu AC Parallele, welche die verlängerte Seite AF in G trifft, und CG. Ferner ziehe man CE und zu ihr durch D eine Parallele, welche die Verlängerung von FE in H schneidet; hierauf CF, und zu ihr durch H eine Parallele, welche die verlängerte Seite AF in K trifft, endlich noch CK; so ist △ GCK das gesuchte.

Bew. Da BG ‖ AC, so ist △ AGC = ABC (§. 115, Zus. 1.); daher auch △ AGC + ACDEF = △ ABC + ACDEF, d. i.

1) Fünfeck GCDEF = Sechseck ABCDEF.

Zieht man CH, so ist, wegen DH ‖ CE, △ CHE = CDE, also auch △ CHE + GCEF = △ CDE + GCEF, d. i.

2) Viereck GCHF = Fünfeck GCDEF.

Endlich ist HK ‖ CF, daher △ CFK = △ CFH, mithin auch △ CFK + △ CFG = △ CFH + △ CFG, d. i.

3) △ GCK = Viereck GCHF.

Addirt man die Gleichungen 1), 2) und 3), so erhält man

△ GCK = Sechseck ABCDEF.

§. 135.

Aufg. Man soll I. zwei gegebene Quadrate in eines verwandeln, d. h. die Seite eines Quadrates finden, das zwei Quadraten zusammen gleich ist; II. ein gegebenes Quadrat verdoppeln.

Aufl. u. Bew. I. Es seien (Fig. 76.) a und b die Seiten der gegebenen Quadrate. Man construire einen rechten Winkel ABC, nehme auf den Schenkeln desselben vom Scheitel aus die Stücke BD = a und BE = b, und ziehe DE, so ist DE die Seite des gesuchten Quadrates; denn es ist (nach §. 120.):

$$\overline{DE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2.$$

II. Man ziehe (Fig. 77.) eine Diagonale AC des gegebenen Quadrates; so ist diese die Seite des gesuchten. Denn es ist (nach §. 120.):

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \text{ oder, weil } AD = CD \text{ ist,}$$
$$= \overline{AD}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{AD}^2.$$

Anm. Wie lassen sich mehrere Quadrate in eines verwandeln?

§. 136.

Aufg. Die Seite eines Quadrates zu finden, welches I. dem Unterschiede zweier gegebener Quadrate; II. der Hälfte eines gegebenen gleich ist.

Aufl. u. Bew. I. Man nehme (Fig. 76.) auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels ABC von dessen Scheitel aus ein Stück BE, welches der Seite des kleinern Quadrates gleich ist, beschreibe aus E mit der Seite des größern Quadrates als Radius einen Bogen, der den andern Schenkel AB in D schneidet; so ist das Stück BD die Seite des gesuchten Quadrates. Denn es ist

$$\overline{BD}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{BE}^2 \text{ (§. 120, Zus. 1.).}$$

II. Man ziehe eine Diagonale AC (Fig. 77.) des gegebenen Quadrates, und halbire dieselbe in E; so ist AE die gesuchte Seite. Denn es ist AE = DE, und $\measuredangle$ n = R (§. 101, Zus.); also

$$\overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = 2\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2; \text{ mithin } \overline{AE}^2 = \tfrac{1}{2}\overline{AD}^2.$$

§. 137.

Aufg. Ein Rechteck (geometrisch) zu quadriren (§. 124, 2.).

Aufl. Man verlängere (Fig. 78.) eine Seite, z. B. AB so, daß BE = BC wird, halbire AE in F, beschreibe über AE einen Halbkreis, welcher entweder die Seite BC selbst, oder deren Verlängerung in G schneidet; so ist BG die Seite des gesuchten Quadrates.

Bew. Zieht man AG, FG und EG, so erhält man, da AF = FG = FE (§. 21, Zus. 1.) ist, auf dieselbe Weise, wie §. 109, $\measuredangle$ AGF + FGE = AGE = R; folglich ist

$$\overline{BG}^2 = AB \, . \, BE = AB \, . \, BC \text{ (§. 120, Zus. 3.).}$$

Zus. 1. Jede geradlinige Figur läßt sich geometrisch quadriren (§. 134, §. 130, II. und §. 114, Zus. 2.).

Zus. 2. Zieht man aus irgend einem Punkte eines Kreises Gerade nach den Endpunkten eines Durchmessers; so schließen diese in jenem Punkte stets einen rechten Winkel ein. Denn für jeden Punkt (G) der Kreislinie wird $\measuredangle$ AGE = R.

Man nennt diesen Winkel einen „Winkel im Halbkreise," und sagt kurz: „Jeder Winkel im Halbkreise ist ein Rechter."

III. Kap. Von den Linienverhältnissen und der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 138.

Erkl. Unter Verhältniß räumlich ausgedehnter Größen versteht man überhaupt das **Verhältniß ihrer Maßzahlen**, d. i. der ihre Quantitäten in Bezug auf einerlei Maß ausdrückenden Zahlen.

Zus. Größen, welche in Bezug auf ein gewisses Maß incommensurabel sind, können in Bezug auf ein kleineres commensurabel sein, oder commensurabel gemacht werden (§. 25.).

a) Theoretische Sätze.

§. 139.

Lehrs. Nimmt man auf einem Schenkel eines Winkels vom Scheitel aus beliebig viele gleiche Theile, und zieht durch die Theilungspunkte gerade unter sich parallele Linien an den andern Schenkel; so wird dieser in ebenso viele unter sich gleiche Theile getheilt.

Dat. $BD = DE = EF$; $DH \parallel EJ \parallel FK$ (Fig. 79.).

Thes. $BH = HJ = JK$.

Bew. Man ziehe durch die Punkte H und J die Geraden HM und JN parallel zum Schenkel BC, so ist $HM = DE$ und $JN = EF$ (§. 98, Zus. 2.); ferner hat man

$BD = DE = EF$ (Dat.), also auch

$BD = HM = JN$; dann ist

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle B = m = n \\ \measuredangle \alpha = \beta = \gamma\end{array}\right\}$$ (§. 45, III.); daher

$\triangle HBD \cong JHM \cong KJN$ (III.); mithin auch

$BH = HJ = JK$.

Zus. Theilt man eine Seite eines Dreieckes in beliebig viele gleiche Theile, und zieht durch alle Theilungspunkte zu einer der beiden andern Seiten parallele Linien; so wird die dritte Seite in ebenso viele unter sich gleiche Theile getheilt.

§. 140.

Lehrs. Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele; so werden die beiden andern Seiten proportional geschnitten, nämlich so, daß I. die Segmente derselben unter sich, und

II. zu den ganzen Seiten in Proportion stehen; III. die Parallele sich zur ungetheilten Seite verhält, wie ein oberes Segment zur ganzen zugehörigen Seite.

Dat. $DE \parallel BC$ (Fig. 80.).

Thes. { I. u. II. $AD \div AE = BD \div CE = AB \div AC$.
III. $DE \div BC = AD \div AB = AE \div AC$.

Bew. I. u. II. Denken wir uns eine Seite, z. B. AB, in lauter gleiche Theile getheilt, so daß auf das Stück AD m und auf DB n solche Theile treffen, so ist, wenn wir einen dieser Theile mit a bezeichnen, $AD = ma$, $BD = na$ und $AB = (m + n)a$; daher (Arithm. §. 256, Zus. 2.):

$$1)\ AD \div BD \div AB = ma \div na \div (m + n)a, \text{ d. i.}$$
$$= m \div n \div (m + n).$$

Zieht man ferner durch alle Theilungspunkte der Seite AB Parallelen zu BC, so wird auch AC in lauter gleiche Theile getheilt (§. 139, Zus.), und zwar ist, wenn wir einen derselben mit α bezeichnen, $AE = m\alpha$, $CE = n\alpha$ und $AC = (m + n)\alpha$, daher auch:

$$2)\ AE \div CE \div AC = m\alpha \div n\alpha \div (m + n)\alpha, \text{ d. i.}$$
$$= m \div n \div (m + n).$$

Durch Comparation der Proportionen 1) und 2) ergibt sich:

$$AD \div BD \div AB = AE \div CE \div AC, \text{ oder}$$
$$AD \div AE = BD \div CE = AB \div AC.$$

III. Zieht man noch $DH \parallel AC$ und wendet den Lehrsatz Nr. II. (ohne Rücksicht auf DE) an, so ist
$CH \div BC = AD \div AB$, oder, da $CH = DE$ (§. 98, Zus. 2.),
$DE \div BC = AD \div AB = AE \div AC$ (Nr. II.).

Dieser Fall (Nr. III.) läßt sich auch so ausdrücken: „Die Parallelen verhalten sich, wie die Entfernungen ihrer Endpunkte von der ihnen gegenüberliegenden Winkelspitze."

Zus. Werden in einem Dreiecke zu einer Seite mehrere Parallelen gezogen; so sind die zwischen ihnen enthaltenen Segmente der beiden andern Seiten proportional. Denn ist $FG \parallel DE \parallel BC$, so ist auch $AD \div AE = AF \div AG = DF \div EG$, ebenso
$AD \div AE = BD \div CE$ (Lehrs. I.); daher auch
$AF \div AG = DF \div EG = BD \div CE$.

§. 141.

Lehrs. Werden zwei Seiten eines Dreieckes durch eine Gerade proportional geschnitten; so ist diese zur dritten Seite parallel.

Dat. AD ∸ AE = AB ∸ AC (Fig. 80.).

Thes. DE ⫲ BC.

Bew. Wäre DE ⋀ BC, so könnte man durch D eine Parallele zu BC ziehen, und diese sei DK; dann wäre aber

AD ∸ AK = AB ∸ AC (§. 140, II.); weil jedoch

AD ∸ AE = AB ∸ AC (Dat.), so hätte man auch

AD ∸ AK = AD ∸ AE; und daher AK = AE,

was offenbar nicht der Fall ist. Es ist daher DE ⫲ BC.

§. 142.

Lehrs. Wird durch eine Winkelspitze eines Dreieckes eine gerade Linie so gezogen, I. daß sie den Winkel halbirt, so schneidet sie die demselben gegenüberliegende Seite zu den beiden anderen Seiten proportionirt; II. daß sie eine Seite zu den beiden andern proportional schneidet, so halbirt sie den Winkel.

I. { Dat. ∡ x = y = $\frac{1}{2}$ABC (Fig. 81.).
Thes. AD ∸ DC = AB ∸ BC.

Bew. Man verlängere die Seite AB so, daß BE = BC wird, und ziehe CE, so ist ∡ m = n (§. 92, I.); ferner

∡ x + y = m + n (§. 78.) oder

2x = 2m, also x = m; folglich

BD ⫲ CE (§. 43, III.), und daher

AD ∸ DC = AB ∸ BE (§. 140, I.), oder

= AB ∸ BC.

II. { Dat. AD ∸ DC = AB ∸ BC (Fig. 81.).
Thes. ∡ x = y = $\frac{1}{2}$ABC.

Bew. Zieht man durch C die Gerade CE ⫲ BD, welche die verlängerte AB in E schneidet; so ist m = x und n = y (§. 45.), ferner AD ∸ CD = AB ∸ BE (§. 140, I.),

AD ∸ CD = AB ∸ BC (Dat.); mithin

BC = BE, und daher

∡ m = n; folglich auch ∡ x = y = $\frac{1}{2}$ABC.

§. 143.

Lehrs. Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke aus der Spitze des rechten Winkels die Senkrechte auf die Hypotenuse; so ist I. jede Kathete die mittlere (geometrische) Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und jenem Segmente derselben, welches an die Kathete anstoßt; II. das Perpendikel selbst die mittlere Proportionale zwischen den beiden Segmenten der Hypotenuse.

Dat. $\measuredangle\, ABC = R = BDC$ (Fig. 82.).

Thes. $\begin{cases} \text{I. a) } AC \div BC \div CD;\ \text{b) } AC \div AB \div AD. \\ \text{II. } AD \div BD \div CD. \end{cases}$

Bew. Macht man $CE = AC$, $CF = BC$, und zieht EF, so ist $\triangle CFE \cong ABC$ (I.); daher auch $\measuredangle\, CFE = ABC = R = BDC$ (Dat.); mithin $EF \parallel BD$ (§. 43, Zus. 2.). Es ist somit (nach §. 140, II.):

ad I.) $EC \div BC = CF \div CD = BC \div CD$, d. i.

a) $AC \div BC \div CD$. — Auf ähnliche Art ergibt sich

b) $AC \div AB \div AD$.

ad II.) $\left.\begin{array}{l} EF \div BD = CF \div CD \\ EF \div CE = BD \div BC \end{array}\right\}$ (§. 140, III.); daher

$\overline{EF}^2 \div CE . BD = BD . CF \div BC . CD$, oder

$\overline{AB}^2 \div AC . BD = BD . BC \div BC . CD$, d. i.

$= BD \div CD$.

Es ist aber $\overline{AB}^2 = AC . AD$ (aus Nr. I. b); daher wird durch Substitution und Abkürzung: $AD \div BD \div CD$.

Zus. Verwandelt man die Proportionen in Nr. I. des Lehrs. in Gleichungen, nnd addirt diese, so erhält man

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AC . AD + AC . CD = AC . (AD + CD)$$
$$= AC . AC = \overline{AC}^2, \text{ d. h. } -? \text{ (Vgl. §. 120.).}$$

Anm. Ist das Verhältniß der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes rational, so nennt man dasselbe vorzugsweise ein pythagoräisches Dreieck (Vgl. Arithm. pag. 226.).

§. 144.

Lehrs. Eine gerade Linie, welche die aparallelen Seiten eines Trapeztums halbirt, ist I. zu den Parallelseiten desselben parallel; II. gleich der halben Summe (dem arithm. Mittel) der Parallelen.

Dat. AD ⫲ BC; AE = BE; DF = CF (Fig. 83.).
Thes. I. EF ⫲ BC ⫲ AD; II. EF = ½ (AD + BC).

Bew. I. Man verlängere AB und CD, bis sie sich in G schneiden; so ist wegen AD ⫲ BC

BG ÷ CG = AB ÷ DC (§. 140, II.), also auch
= ½ AB ÷ ½ DC, d. i.
= BE ÷ CF; folglich
EF ⫲ BC ⫲ AD (§. 141. und §. 48, Zus. 3.).

II. Zieht man noch die Linie BD, welche EF in H schneidet, so ist EH ⫲ AD (Nr. I.), und daher (nach §. 140, III.)

EH ÷ AD = BE ÷ BA = BE ÷ 2BE, d. i.
= 1 ÷ 2; also
1) EH = ½ AD. — Ebenso ergibt sich
HF ÷ BC = DF ÷ DC = 1 ÷ 2, folglich
2) HF = ½ BC; daher auch durch Addition
EH + HF = EF = ½ (AD + BC).

Anm. Man nennt die Linie EF wegen der im Lehrsatze II. erwiesenen Eigenschaft die **Mittellinie** des Trapeziums.

§. 145.

Erkl. 1. Unter **Aehnlichkeit** der Figuren versteht man ihre Uebereinstimmung in Hinsicht auf Qualität (Form).

2. Geradlinige Figuren sind ähnlich, wenn sie a) gleichnamig sind, b) alle Winkel der Ordnung nach gleich haben, und c) die gleichliegenden (oder homologen) d. i. die gleiche Winkel einschließenden Seiten in Proportion stehen.

Zus. 1. Zwei Figuren, welche der nämlichen dritten ähnlich sind, sind auch unter sich ähnlich.

Zus. 2. Alle gleichnamigen regulären Figuren sind ähnlich (§. 85, Zus. 2. und §. 138, Zus.).

Zus. 3. Aehnliche Größen sind congruent, sobald man sich dieselben als gleich groß denkt.

§. 146.

Lehrs. Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so ist das durch sie abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich.

Dat. DE ⫲ BC. — Thes. △ ADE ∾ ABC (Fig. 80.).

Bew. Es ist $\measuredangle DAE = BAC$, ferner wegen $DE \# BC$, $\measuredangle ADE = ABC$ und $\measuredangle AED = ACB$ (§. 45, III.). Dann ist

$$AD \div AB = AE \div AC = DE \div BC \text{ (§. 140.)}.$$

Beide Dreiecke haben also die Winkel gleich und die Seiten proportional; mithin ist $\triangle ADE \sim ABC$.

Zus. In ähnlichen Dreiecken liegen den gleichen Winkeln proportionirte Seiten, und diesen gleiche Winkel gegenüber.

§. 147.

Lehrs. (I. *). Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seiten beziehungsweise proportionirt und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben.

Dat. $ab \div AB = ac \div AC$, und $\measuredangle a = A$ (Fig. 84.).

Thes. $\triangle abc \sim ABC$.

Bew. Man nehme auf AC ein Stück $AD = ab$, und ziehe $DE \# BC$, so ist $\triangle ADE \sim ABC$ (§. 146.), daher auch

$AD \div AB = AE \div AC$ (§. 140, II.); es ist aber auch

$ab \div AB = ac \div AC$ (Dat.), mithin, weil $AD = ab$,

$AE \div AC = ac \div AC$, folglich

$AE = ac$, und daher

$\triangle ADE \cong abc$ (I.); also auch $\triangle abc \sim ABC$.

Zus. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Katheten gegenseitig proportionirt sind.

Anm. Man beweise den Lehrsatz durch Aufeinanderlegen der beiden Dreiecke!

§. 148.

Lehrs. (II.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie alle drei Seiten der Ordnung nach proportionirt haben.

Dat. $ab \div AB = ac \div AC = bc \div BC$ (Fig. 84.).

Thes. $\triangle abc \sim ABC$.

Bew. Man mache $AD = ab$, und ziehe $DE \# BC$; so ist $\triangle ADE \sim ABC$, und daher

$AD \div AB = AE \div AC$. Es ist aber

$ab \div AB = ac \div AC$ (Dat.); also

$AD \div ab = AE \div ac$; folglich, da $AD = ab$ ist,

$AE = ac$.

---

*) Den vier Congruenzfällen entsprechen vier Aehnlichkeitsfälle, welche man erhält, wenn man in den erstern nur statt „gleiche" Seiten „proportionirte" Seiten setzt.

Ebenso ist $AD \div AB = DE \div BC$ (§. 140, III.), aber auch
$ab \div AB = bc \div BC$ (Dat.), daher

$DE = bc$ (Arithm. §. 256, Zus. 3.); mithin
$\triangle\ ADE \cong abc$ (II.); also auch $\triangle\ abc \sim ABC$.

§. 149.

Lehrs. (III.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Winkel (also alle drei) beziehungsweise gleich haben.

Dat. $\measuredangle\ bac = BAC$; $\measuredangle\ b = B$ (Fig. 84.).

Thes. $\triangle\ abc \sim ABC$.

Bew. Man nehme $AD = ab$, und ziehe $DE \parallel BC$, so ist $\triangle\ ADE \sim ABC$; dann $\measuredangle\ ADE = ABC = \measuredangle\ b$.

Da ferner $AD = ab$, und $\measuredangle\ BAC = bac$ (Dat.), so ist $\triangle\ ADE \cong abc$ (III.); folglich auch $\triangle\ abc \sim ABC$.

Zus. 1. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen spitzen; zwei gleichschenklige, wenn sie irgend einen Winkel gleich haben.

Zus. 2. Die Senkrechte, welche im rechtwinkligen Dreiecke aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt wird, theilt dasselbe in zwei Dreiecke, welche dem ganzen, also auch unter sich ähnlich sind (Zus. 1.).

§. 150.

Lehrs. (IV.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seiten beziehungsweise proportionirt, und ein Paar Winkel, welche den größern dieser Seiten gegenüberliegen, gleich haben.

Dat. $\begin{cases} ab \div AB = ac \div AC;\ \measuredangle\ c = C, \text{ dann} \\ ab > ac, \text{ und } AB > AC \text{ (Fig. 84.).} \end{cases}$

Thes. $\triangle\ abc \sim ABC$.

Bew. Wir machen $AD = ab$, und ziehen $DE \parallel BC$, so ist $\triangle\ ADE \sim ABC$; daher

$AD \div AB = AE \div AC$, aber auch
$ab \div AB = ac \div AC$ (Dat.); folglich

$AE = ac$.

Da ferner $\measuredangle\ AED = C = c$, so ist $\triangle\ ADE \cong abc$ (IV.); mithin $\triangle\ abc \sim ABC$.

Zus. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete beziehungsweise proportionirt haben.

§. 151.

Lehrs. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen wie die Grundlinien.

Dat. $\triangle$ abc $\sim$ ABC (Fig. 84.).

Thes. ad $\div$ AD $=$ bc $\div$ BC.

Bew. Da $\triangle$ abc $\sim$ ABC, also auch $\measuredangle$ b $=$ B, ferner $\measuredangle$ m $=$ n $=$ R; so ist auch $\triangle$ abd $\sim$ ABD (§. 149.); mithin

ab $\div$ AB $=$ ad $\div$ AD, ebenso

ab $\div$ AB $=$ bc $\div$ BC (Dat.); daher auch

ad $\div$ AD $=$ bc $\div$ BC.

Zus. Die Höhen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie jedes Paar gleichliegender Seiten.

§. 152.

Lehrs. Aehnliche Polygone werden durch gleichliegende Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

Dat. abcde $\sim$ ABCDE (Fig. 85.).

Thes. $\triangle$ abc $\sim$ ABC; $\triangle$ acd $\sim$ ACD &c.

Bew. Da die beiden Polygone ähnlich sind, so ist $\measuredangle$ b $=$ B und ab $\div$ AB $=$ bc $\div$ BC; mithin $\triangle$ abc $\sim$ ABC (I.), daher auch $\measuredangle$ acb $=$ ACB, und ac $\div$ AC $=$ bc $\div$ BC. Es ist aber auch cd $\div$ CD $=$ bc $\div$ BC; also ac $\div$ AC $=$ cd $\div$ CD.

Weil ferner $\measuredangle$ bcd $=$ BCD, und $\measuredangle$ acb $=$ ACB, so folgt $\measuredangle$ acd $=$ ACD; also ist auch

$\triangle$ acd $\sim$ ACD (I.)

Ebenso ergibt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke aed und AED.

Zus. 1. Sind umgekehrt zwei Polygone aus gleichvielen der Ordnung nach ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt; so sind die Polygone selbst ähnlich.

Zus. 2. In ähnlichen Polygonen verhalten sich gleichliegende Diagonalen, wie ein Paar homologer Seiten.

§. 153.

Lehrs. Die Perimeter (p und P) ähnlicher Vielecke verhalten sich wie ein Paar gleichliegender Seiten.

Dat. abcde $\sim$ ABCDE (Fig. 85.).

Thes. p $\div$ P $=$ ab $\div$ AB $=$ bc $\div$ BC &c.

Bew. Da beide Polygone ähnlich sind, so hat man $ab \div AB = bc \div BC = cd \div CD = de \div DE = ea \div EA$; demnach verhält sich auch (nach Arithm. §. 260.):

$$(ab + bc + cd + de + ea) \div (AB + BC + CD + DE + EA)$$
$$= ab \div AB = bc \div BC \text{ ic., d. i.}$$
$$p \div P = ab \div AB = bc \div BC \text{ ic.}$$

Zus. Die Perimeter ähnlicher Polygone verhalten sich auch wie gleichliegende Diagonalen (§. 152, Zus. 2.)

b) Praktische Sätze.

§. 154.

Aufg. Es soll eine gerade Linie nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden.

Aufl. u. Bew. Die gegebene Linie sei AB (Fig. 86.), und soll z. B. in drei Theile getheilt werden, welche sich wie die Geraden m, n, p verhalten.

Man ziehe aus einem Endpunkte A unter einem beliebigen (spitzen) Winkel eine Gerade AC, nehme auf dieser $AD = m$, $DE = n$ und $EC = p$, ziehe dann CB und durch E und D die Linien EF und DG parallel zu BC; so ist

$$AG \div GF \div BF = AD \div DE \div EC \text{ (§. 140, Zus.), d. i.}$$
$$= m \div n \div p.$$

Zus. 1. Trägt man auf AC lauter gleiche Theile auf; so wird auch AB in lauter gleiche Theile getheilt (§. 139.).

Zus. 2. Wäre das Verhältniß, in welchem AB getheilt werden soll, nicht in Linien, sondern in Zahlen gegeben, z. B. $2 \div 3 \div 5$; so würde man $2 + 3 + 5 = 10$ beliebige unter sich gleiche Theile auf AC auftragen, den letzten Theilungspunkt mit B durch eine Gerade verbinden, nnd zu dieser durch den zweiten und fünften Theilungspunkt Parallelen ziehen.

§. 155.

Aufg. Einen (verjüngten) geometrischen Maßstab zu zeichnen.

Aufl. Man nehme auf einer unbestimmt langen Linie AM (Fig. 87.) ein beliebiges Stück AB, trage dieses mehrere Male auf, so daß also $AB = BC$ u. s. f. wird. Hierauf errichte man in

A eine beliebig lange Senkrechte auf AC, und ziehe durch den Endpunkt D derselben die Gerade DF ⫲ AC, und durch B, C... Parallelen zu AD. Dann theile man AB in zehn gleiche Theile, welche von B nach A mit 1, 2, 3...10 bezeichnet werden; ebenso theile man von A aus die Linie AD in zehn gleiche Theile, und bezeichne sie wieder durch die Zahlen 1, 2, 3....10. Hierauf ziehe man durch alle Theilungspunkte der Linie AD Gerade parallel zu AC, verbinde den Punkt D mit dem Theilungspunkte 9 der Linie AB, und ziehe durch 8, 7, 6...B Parallele zu D9; so ist das Verlangte geleistet.

Bew. Es habe AB die Geltung einer Ruthe, so enthält der Maßstab Ruthen, Fuß und Zoll; denn es ist $AB = BC .. = 1^0$. Die Theile der Linie AB sind Fuß; denn es ist $B1 = 1, 2 = 1, 3 = ...$ $= \frac{AB}{10} = \frac{1^0}{10} = 1'$. Endlich sind die Stücke der Parallelen zwischen BE und BG, z. B. ab, cd, ef Zolle; denn es ist

$$BE \div Bb = EG \div ab \text{ (§. 140, III.), oder}$$
$$10 \div 1 = EG \div ab, \text{ also}$$
$$ab = \frac{EG}{10} = \frac{B1}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{AB}{10} = \frac{1^0}{100} = 1''.$$

Zus. 1. Auf dieselbe Art erhält man, wenn man AB und AD in zwölf gleiche Theile theilt, einen zwölftheiligen Maßstab.

Zus. 2. Stellt AB einen Schuh vor, und man denkt sich AB zehnmal auf AM aufgetragen, so ist $10 . AB = 1^0$, welche in 1000 gleiche Theile getheilt ist. Ein solcher Maßstab heißt dann ein tausendtheiliger.

Anm. In Bayern gibt man gewöhnlich dem tausendtheiligen Maßstabe die Länge eines ganzen und halben bayerischen Fußes, mithin einer Abtheilung AB die Länge eines ganzen (oder halben) Dezimalzolles (Fig. 87.).

§. 156.

Aufg. Mittelst eines verjüngten Maßstabes I. eine gerade Linie zu messen; II. eine in Zahlen gegebene Linie auf das Papier zu bringen.

Aufl. I. Man fasse die gegebene Linie in den Zirkel, und suche, auf welcher der Parallelen zwischen AM und DF (Fig. 87.) die Spitzen des Zirkels genau in Theilungspunkte gesetzt werden

können; so geben die Zahlen der Linie AM die Ruthen und Schuh, die der Linie AD die Zolle an.

Stellt z. B. AB eine Ruthe vor, und es können die Zirkelspitzen in m und n eingesetzt werden; so ist die Länge der gegebenen Linie mp + pn = BC + pn = 1°6′5″.

II. Man trage auf eine unbestimmt lange Linie zuerst die gegebenen Ruthen, die man auf AM nimmt, auf; an diese reihe man die Schuh und Zoll, welche man dadurch erhält, daß man eine Zirkelspitze auf jener Parallelen zwischen AB und DE einsetzt, welche die gegebenen Zolle da angibt, wo diese von jener schiefen (Transversale), welche die Fuß bezeichnet, durchschnitten wird; die andere Zirkelspitze wird in den zugehörigen Theilpunkt des Perpendikels BE gebracht.

§. 157.

Aufg. Es soll I. zu drei gegebenen geraden Linien die vierte, und II. zu zwei Geraden die dritte (geometrische) Proportionale gefunden werden.

Aufl. u. Bew. I. Die gegebenen Linien seien a, b, c. Man nehme einen beliebigen Winkel CAB (Fig. 86.), mache AG = a, AF = b und AD = c, ziehe dann DG und durch F die Gerade EF ∦ DG; so ist AE die gesuchte Linie (x). Denn es ist

$$AG \div AF = AD \div AE \text{ (§. 140, II.), oder}$$

$$a \div b = c \div x.$$

II. Um zu zwei Geraden a und b die dritte Proportionale zu finden, braucht man nur c = b, also AD = AF zu machen, und wie oben zu verfahren; denn es ist dann

$$AG \div AF = AF \div AE, \text{ d. i.}$$

$$a \div b = b \div x, \text{ oder } a \div b \div x.$$

Anm. Man löse die Aufgabe auch nach §. 140, II. und III.

§. 158.

Aufg. Zu zwei gegebenen Geraden die mittlere (geometrische) Proportionale zu construiren.

I. Aufl. u. Bew. Die gegebenen Linien seien a und b. Man nehme (Fig. 78.) AB = a, und verlängere sie so, daß BE = b wird, halbire AE in F, und beschreibe darüber mit dem Radius FA einen Halbkreis, errichte hierauf BG ⊥ AE, so ist BG die

gesuchte Linie (x). Denn zieht man AG und EG, so ist ∡ AGE = R (§. 137, Zus. 2.); also wegen BG ⊥ AE (nach §. 143, II.)

AB ∻ BG ∻ BE, oder a ∻ x ∻ b.

II. Aufl. u. Bew. Man nehme (Fig. 88.) AB = a, mache dann AC = b, beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in C die Linie CD ⊥ AB, und ziehe AD; so ist diese die gesuchte Linie. Denn es ist, wenn man BD zieht, ∡ ADB = R (§. 137, Zus. 2.); also

AB ∻ AD ∻ AC (§. 143, I.), oder a ∻ x ∻ b.

Zus. Aus beiden Auflösungsarten der Aufgabe ergeben sich nachstehende Folgerungen:

I.) Jede Senkrechte, die aus einem Punkte der Kreislinie auf einen Diameter gefällt wird, ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten desselben;

II.) Fällt man aus dem einen Endpunkte einer Sehne ein Loth auf den an den andern Endpunkt derselben gezogenen Diameter; so ist die Sehne die mittlere Proportionale zwischen dem Diameter und jenem Segmente desselben, das der Sehne anliegt.

§. 159.

Aufg. Eine gegebene Gerade in stetiger Proportion (oder im mittlern und äußern Verhältnisse), d. h. so zu theilen, daß das größere Stück die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleinern Stücke wird.

Aufl. Man halbire (Fig. 89.) die gegebene Linie AB, errichte in A die Senkrechte AD = ½ AB, und ziehe BD, nehme dann (von D aus) auf DB ein Stück DE = AD, und beschreibe endlich aus B mit dem Radius BE einen Bogen, der AB in F schneidet, d. i. mache BF = BE; so ist in F die Linie AB auf die verlangte Weise getheilt.

Bew. Da ∡ BAD = R, so ist

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 \text{ (§. 120.)}$$
$$= \overline{BE}^2 + 2BE.DE + \overline{DE}^2 \text{ (§. 117.)},$$
$$= \overline{BF}^2 + 2BF.AD + \overline{AD}^2; \text{ daher}$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{BF}^2 + 2AD.BF = \overline{BF}^2 + AB.BF,$$

indem AD = ½ AB, also 2AD = AB ist. Hieraus folgt

$$\overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 - AB \,.\, BF$$
$$= AB(AB - BF) = AB \,.\, AF; \text{ alſo}$$
$$AB \div BF \div AF \text{ (Arithm. §. 254, Zuſ. 1.).}$$

Anm. Die Theilung einer Linie im mittlern und äußern Verhältniſſe (in media et extrema ratione) wurde von den alten Mathematikern der goldene Schnitt (Sectio aurea oder divina) genannt. Das durch dieſe Theilung einer Geraden erhaltene größere Stück nennt man auch die Mediane derſelben.

§. 160.

Aufg. Eine gerade Linie in ſtetiger Proportion zu verlängern, d. h. ſo, daß ſie ſelbſt die mittlere Proportionale zwiſchen der ganzen verlängerten Linie und der Verlängerung wird.

Aufl. Man halbire (Fig. 90.) die gegebene Linie AB in C, errichte in B die Senkrechte $BD = AB$, beſchreibe aus C mit dem Radius CD einen Bogen, der die verlängerte AB in E trifft; ſo iſt das Verlangte geſchehen.

Bew. Es iſt $\measuredangle$ DBC = R; daher

$$\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 \text{ (wegen } CE = CD\text{), oder}$$
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BE}^2 + 2BC.\,BE \text{ (§. 117.); alſo}$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{BE}^2 + AB.BE \text{ (da } 2BC = AB \text{ iſt), oder}$$
$$\overline{AB}^2 = BE(BE + AB) = BE \,.\, AE; \text{ mithin}$$
$$AE \div AB \div BE.$$

§. 161.

Aufg. Ueber einer gegebenen Geraden ein Dreieck zu conſtruiren, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich iſt.

I. Aufl. u. Bew. Das gegebene Dreieck ſei (Fig. 84.) ABC, die gegebene Linie bc. Man conſtruire in b den $\measuredangle$ abc = ABC und in c den $\measuredangle$ acb = ACB; ſo iſt $\triangle$ abc $\sim$ ABC (§. 149.).

II. Aufl. u. Bew. Iſt $\triangle$ ABC (Fig. 80.) und eine Linie a gegeben; ſo mache man $AD = a$, und ziehe DE $\#$ BC; dann iſt $\triangle$ ADE $\sim$ ABC (§. 146.).

§. 162.

Aufg. Ueber einer gegebenen Geraden ein Polygon zu conſtruiren, das einem gegebenen ähnlich iſt.

I. Aufl. u. Bew. Man zerlege (Fig. 85.) das gegebene

Polygon ABCDE von einer Ecke aus durch Diagonalen in Dreiecke; construire über der gegebenen Linie ab das $\triangle abc \sim ABC$ (nach §. 161, I.), auf dieselbe Art dann über ac das $\triangle acd \sim ACD$, endlich über ad das $\triangle ade \sim ADE$; so ist $abcde \sim ABCDE$ (§. 152, Zus. 1.).

II. Aufl. Man trage (Fig. 91.) die gegebene Gerade auf einer Seite AB des Polygons auf, mache ihr also Ab gleich; zerlege von A aus das Polygon in Dreiecke, ziehe durch b die Gerade $bc \# BC$, ferner $cd \# CD$ u. s. w.; so ist $Abcdef \sim ABCDEF$ (§. 146 und 152, Zus. 1.).

IV. Kap. Von den Flächenverhältnissen und der Messung der Figuren.

§. 163.

Erkl. 1. Unter Fläche (Flächeninhalt) einer Figur versteht man die Menge der homogenen Theile, aus denen sie besteht, also jene Zahl, welche angibt, wie oft ein gewisses Maß in ihr enthalten ist. (Vgl. §. 65, 2.).

2. Verhältniß der Figuren in Bezug auf ihre Flächen ist das Verhältniß der ihre Quantitäten in Rücksicht auf einerlei Maß ausdrückenden Zahlen (Vgl. §. 138.).

a) Theoretische Sätze.

§. 164.

Lehrs. Dreiecke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Dat. $\measuredangle AGB = R = DHE$; $BG = EH$ (Fig. 92.).

Thes. $\triangle ABC \div \triangle DEF = AC \div DF$.

Bew. Man nehme eine beliebige Linie AK, welche sowohl in AC als DF genau enthalten ist, was in AC allgemein m=mal, und in DF n=mal der Fall sein mag; so ist $AC = m . AK$ und $DF = n . AK$. Hieraus folgt die Proportion

1) $AC \div DF = m . AK \div n . AK = m \div n$.

Zieht man ferner durch alle Theilungspunkte, die man durch das Auftragen der Linie AK in beiden Grundlinien erhalten hat,

gerade Linien nach den Spitzen der Dreiecke; so erhält man ebenso viele kleinere Dreiecke, als die Grundlinien Theile haben, welche alle einander gleich sind (§. 113, Zus. 3. und §. 115, Zus. 1.), und von denen eines △ ABK ist. Man hat daher

△ ABC = m . ABK und △ DEF = n . ABK; mithin auch

2) △ ABC ÷ △ DEF = m ÷ n.

Diese Proportion mit obiger 1) verglichen, gibt somit

△ ABC ÷ △ DEF = AC ÷ DF.

Zus. 1. Zwei rechtwinklige Dreiecke, die eine Kathete gleich haben, verhalten sich wie die andern Katheten.

Zus. 2. Da jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogrammes von gleicher Basis und Höhe ist (§. 115.), und die Ganzen sich ebenso wie ihre Hälften verhalten; so verhalten sich auch Parallelogramme von gleichen Höhen wie ihre Grundlinien.

Zus. 3. Zwei Dreiecke (oder Parallelogramme), die einen Winkel gemeinschaftlich haben, verhalten sich wie die Produkte aus den jenen Winkel einschließenden Seiten; denn zieht man (Fig. 94.) BE, so ist △ ADE ÷ ABE = AD ÷ AB, ebenso

△ ABE ÷ ABC = AE ÷ AC (Lehrs.); daher

△ ADE ÷ ABC = AD . AE ÷ AB . AC.

§. 165.

Lehrs. Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Dat. AC = DF; ∡ AGB = R = DHE (Fig. 93.).

Thes. △ ABC ÷ △ DEF = BG ÷ EH.

Bew. Man errichte in D eine Senkrechte DM = EH, nehme auf derselben DN = BG, und ziehe FM und FN, so ist △ DFN = ABC und △ DFM = DEF (§. 115, Zus. 2.). Da nun ∡ MDF = R, so ist

△ DFN ÷ DFM = DN ÷ DM (§. 164, Zus. 1.); d. i.

△ ABC ÷ DEF = BG ÷ EH.

Zus. Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

§. 166.

Lehrs. Alle Dreiecke verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Dat. $\sphericalangle$ AGB = R = DHE (Fig. 95.).

Thes. $\triangle$ ABC ÷ DEF = AC.BG ÷ DF.EH.

Bew. Man nehme auf EH ein Stück HM = BG, und ziehe DM und FM, so haben $\triangle$ ABC und DMF gleiche Höhen, dann DMF und DEF gleiche Basis, also ist:

$\triangle$ ABC ÷ DMF = AC ÷ DF (§. 164.), und
$\triangle$ DMF ÷ DEF = HM ÷ EH (§. 165.); daher
$\triangle$ ABC ÷ DEF = AC.HM ÷ DF.EH, oder
= AC.BG ÷ DF.EH.

Zus. Parallelogramme verhalten sich wie die Produkte aus Grundlinien und Höhen; Rechtecke wie die Produkte zweier anstoßender Seiten (Länge und Breite); rechtwinklige Dreiecke wie die Produkte aus ihren Katheten.

§. 167.

Lehrs. Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Dat. $\triangle$ abc $\sim$ ABC (Fig. 84.).

Thes. $\triangle$ abc ÷ ABC = $\overline{ab}^2 \div \overline{AB}^2$.

Bew. Zieht man die Höhen ad und AD, so hat man

ab ÷ AB = bc ÷ BC (Dat.), ferner
ab ÷ AB = ad ÷ AD (§. 151, Zus.); mithin
1) $\overline{ab}^2 \div \overline{AB}^2$ = bc.ad ÷ BC.AD. Nun ist auch
2) $\triangle$ abc ÷ ABC = bc.ad ÷ BC.AD (§. 166.); daher
$\triangle$ abc ÷ ABC = $\overline{ab}^2 \div \overline{AB}^2$, oder auch
$= \overline{bc}^2 \div \overline{BC}^2 = \overline{ac}^2 \div \overline{AC}^2$.

Zus. Aehnliche Dreiecke verhalten sich auch wie die Quadrate ihrer Höhen (§. 151, Zus.).

§. 168.

Lehrs. Aehnliche Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Diagonalen.

Dat. abcde $\sim$ ABCDE (Fig. 85.).

Thes. abcde ÷ ABCDE = $\overline{ab}^2 \div \overline{AB}^2 = \overline{ac}^2 \div \overline{AC}^2$.

Bew. Da beide Polygone ähnlich sind, so sind alle Seiten, folglich auch die Quadrate derselben proportional (Arithm. §. 264, I.), also

$\overline{ab}^2 \div \overline{AB}^2 = \overline{bc}^2 \div \overline{BC}^2 = \overline{cd}^2 \div \overline{CD}^2$ 2c.

Theilt man ferner beide Polygone durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke, so sind diese ähnlich (§. 152.); daher (nach §. 167.):

$$\triangle\, abc \div ABC = \overline{ab}^2 \div \overline{AB}^2,$$
$$\triangle\, acd \div ACD = \overline{cd}^2 \div \overline{CD}^2 = \overline{ab}^2 \div \overline{AB}^2,$$
$$\triangle\, ade \div ADE = \overline{ae}^2 \div \overline{AE}^2 = \overline{ab}^2 \div \overline{AB}^2;$$ also

$$(\triangle\, abc + acd + ade) \div (\triangle\, ABC + ACD + ADE)$$
$$= \overline{ab}^2 \div \overline{AB}^2$$ ꝛc. (Arithm. §. 261. Zus. 1.), d. i.
$$abcde \div ABCDE = \overline{ab}^2 \div \overline{AB}^2 = \overline{bc}^2 \div \overline{BC}^2$$ ꝛc.
$$= \overline{ac}^2 \div \overline{AC}^2$$ ꝛc. (§. 152, Zus. 2.).

§. 169.

Erkl. 1. Bei der Messung der Figuren kann es sich um den Umfang oder Flächeninhalt, oder beide zugleich handeln.

2. Zur Messung des Umfanges dient eines der gebräuchlichen Längenmaße (§§. 52. und 54.).

3. Zur Flächenmessung nimmt man als Grundmaß ein Quadrat, dessen Seite die Einheit des Längenmaßes ist, welches deßhalb Quadrat-Fuß oder -Schuh genannt, und durch 1 □′ bezeichnet wird. — Man theilt denselben in Quadrat-Zolle, -Linien, -Skrupel; und zwar ist

a) nach der Decimaleintheilung (dc):

$$1\,\square' = 100\,\square'' = 10000\,\square''' = 1000000\,\square''''$$
$$1\,\square'' = 100\,\square''' = 10000\,\square''''$$
$$1\,\square''' = 100\,\square'''';$$

b) nach der Duodecimaleintheilung (ddc):

$$1\,\square' = 144\,\square'' = 20736\,\square''' = 2985984\,\square''''$$
$$1\,\square'' = 144\,\square''' = 20736\,\square''''$$
$$1\,\square''' = 144\,\square''''.$$

Zus. Eine Fläche messen heißt daher auch ihren Flächeninhalt in Quadrat-Fuß, -Zoll und -Linien angeben.

Anm. 1. Das französische Flächenmaß ist das Quadrat eines Decameters, das man Are nennt. Ein Are enthält 10 Déciar oder 100 Centiare, d. i. 100 □ Meter; ferner geben 100 Are ein Hectare, und 100 Hectare ein Myriare.

Anm. 2. Zur Vergleichung einiger Flächenmaßeinheiten dient folgende Tabelle (vgl. §. 52, Anm. 2.):

Bayer. □'.	□=Meter.	Par. □'.	Rhein. □'.	Wien. □'.	Engl. □'.
1	0·085182	0·807252	0·864754	0·852448	0·916922
11·739600	1	9·476817	10·151870	10·007390	10·764296
1·238770	0·105521	1	1·071232	1·055987	1·135856
1·156398	0·098504	0·933505	1	0·985769	1·060327
1·173093	0·999261	0·946982	1·014437	1	1·075635
1·090605	0·092900	0·880393	0·943105	0·929684	1

§. 170.

Erkl. Von Flächenmaßen, die größer sind, als der Quadratfuß, sind besonders gebräuchlich:

1) die Quadratklafter = 36 □';

2) die Quadratruthe (kurz bezeichnet durch: 1 □°), welche gleich ist 100 □' dc. und 144 □' ddc.;

3) die bayer. Jauchert, Tagwerk oder Morgen = 40000 □'. Sie wird wieder in 100 Decimalen eingetheilt, deren jede 400 □' oder 4 □° enthält;

4) die Quadratmeile = 644148257·76 □' = 16103·7 Tagw.

§. 171.

Aufg. Den Umfang einer geradlinigen Figur zu berechnen.

Aufl. und Bew. Man messe alle Seiten durch einerlei Längenmaß, und addire die ihre Längen ausdrückenden Zahlen; so ist deren Summe der gesuchte Umfang (§. 65, 1.).

Zus. Bezeichnen wir den Umfang einer Figur mit p, so ist I. bei jedem Parallelogramme $p = 2(a + b)$, wenn a und b die Länge von zwei anstoßenden Seiten; II. beim gleichschenkligen Dreiecke, dessen Schenkel a und Basis b ist, $p = 2a + b$; III. bei jeder gleichseitigen und regulären Figur von n Seiten $p = na$, wenn a die Länge einer Seite ausdrückt.

§. 172.

Lehrs. Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte aus (den Maßzahlen) seiner Basis (b) und Höhe (h).

Dat. BD $\perp$ AC; AC = b, und BD = h (Fig. 96.).

Thes. $\triangle$ ABC = $\frac{1}{2}$ AC . BD = $\frac{1}{2}$ bh.

Bew. Ist mn die Einheit irgend eines Längenmaßes, das in AC und BD enthalten (also in Bezug auf diese Linien = 1) ist, und man errichtet darüber das Quadrat mr, so ist dieses die Einheit des Flächenmaßes. Setzt man nun mr = q und zieht pn; so ist $\triangle$ mnp = $\frac{1}{2}$ mr = $\frac{1}{2}$ q (§. 98, Zus. 1.). Es ist aber

$\triangle$ mnp ÷ $\triangle$ ABC = mn . mp ÷ AC . BD (§. 166.), oder

$\frac{1}{2}$ q ÷ $\triangle$ ABC = 1 ÷ AC . BD; also

$\triangle$ ABC = AC . BD . $\frac{1}{2}$ q = $\frac{1}{2}$ AC . BD . q, oder da q eine willkürliche Flächenmaßeinheit, also = 1 ist:

$\triangle$ ABC = $\frac{1}{2}$ AC . BD = $\frac{1}{2}$ bh.

Zus. 1. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist dem halben Produkte seiner Katheten gleich.

Zus. 2. Bezeichnet man den Flächeninhalt eines Dreieckes (in Zahlen ausgedrückt) durch f, so folgt aus f = $\frac{1}{2}$ bh:

$$\text{I. } b = \frac{2f}{h}; \text{ und II. } h = \frac{2f}{b}, \text{ d. h. — ?}$$

§. 173.

Lehrs. Der Flächeninhalt eines Parallelogrammes ist gleich dem Produkte aus (den Maßzahlen) seiner Basis (b) und Höhe (h).

Dat. AB ∦ CD, und AD ∦ BC (Fig. 46.).

Thes. Prlgr. BD = bh.

Bew. Zieht man eine Diagonale AD, so ist (nach §. 98, Zus. 1.)

Prlgr. BD = 2 . $\triangle$ ABC = 2 . $\frac{1}{2}$ bh = bh.

Zus. 1. Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus zwei anstoßenden Seiten (aus Länge und Breite).

Zus. 2. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist a^2, wenn a die Maßzahl seiner Seite ausdrückt.

§. 174.

Lehrs. Der Flächeninhalt eines Trapeziums ist gleich dem halben Produkte aus (den Maßzahlen) seiner Höhe (h) in die Summe der beiden parallelen Seiten (b und p).

Dat. AD ∦ BC, und AE $\perp$ BC (Fig. 97.).

Thes. Tr. BD = $\frac{1}{2}$ h (b + p).

Bew. Theilt man das Trapez durch die Diagonale AC in zwei Dreiecke, und betrachte BC ∥ AD als Grundlinien derselben, so haben beide gleiche Höhe AE (§. 98, Zus. 3.). Man hat somit

$$\text{Tr. } BD = \triangle\, ABC + ACD, \text{ oder (nach §. 172.)}$$
$$= \tfrac{1}{2} BC.AE + \tfrac{1}{2} AD.AE = \tfrac{1}{2} AE.(BC + AD), \text{ oder}$$
$$= \tfrac{1}{2} h(b + p) = \tfrac{1}{2}(b + p).h.$$

Zus. Der Inhalt eines Trapeziums ist gleich dem Produkte aus seiner Höhe in die Mittellinie (§. 144, II.).

Anm. Wie läßt sich die für den Inhalt eines Trapeziums entwickelte Formel auf ein Dreieck und Parallelogramm anwenden? Welchem Dreiecke oder Parallelogramme ist ein Trapez gleich?

§. 175.

Lehrs. Der Flächeninhalt eines Trapezoides (mit ausspringenden Winkeln) ist gleich dem halben Produkte aus einer Diagonale in die Summe der Abstände von den ihr gegenüberliegenden Winkelspitzen.

Dat. $\measuredangle\, AEB = R = AFD$ (Fig. 98.).

Thes. $ABCD = \tfrac{1}{2} AC\,(BE + DF)$.

Bew. Vermöge der Diagonale AC, hat man offenbar

$$ABCD = \triangle\, ABC + ACD.$$
$$= \tfrac{1}{2} AC.BE + \tfrac{1}{2} AC.DF \text{ (§. 172.)},$$
$$= \tfrac{1}{2} AC\,(BE + DF).$$

Hat das Trapezoid einen einspringenden Winkel (Fig. 99.), so ist, wenn man AC und darauf die Lothe BE und DF zieht:

$$ABCD = \triangle\, ABC - ADC = \tfrac{1}{2} AC.BE - \tfrac{1}{2} AC.DF,$$
$$= \tfrac{1}{2} AC\,(BE - DF).$$

Zus. Soll der Inhalt eines irregulären Polygons berechnet werden, so zerlege man dasselbe

a) durch Diagonalen in Dreiecke, berechne diese einzeln; dann ist ihre Summe der gesuchte Flächeninhalt. Man kann hiebei öfter zwei Dreiecken eine gemeinschaftliche Basis geben, wodurch die Berechnung etwas vereinfacht wird. So wird z. B. (Fig. 100.)

$$ABCDE = \text{Viereck } BCDE + \triangle\, AEB$$
$$= \tfrac{1}{2} BD(CG + EF) + \tfrac{1}{2} BE.AH.$$

b) Man ziehe (Fig. 101.) eine beliebige Diagonale (Axe) BF, und fälle aus allen Ecken der Figur Senkrechte (Ordinaten) auf

dieselbe; so wird das ganze Vieleck in lauter rechtwinklige Dreiecke und Trapezien getheilt, deren Flächeninhalte zusammen den Inhalt des Polygons geben.

Anm. Von den regulären Vielecken wird später gehandelt werden.

b) Praktische Sätze.

§. 176.

Aufg. Ein Dreieck durch gerade, von einer Winkelspitze auslaufende Linien in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. u. Bew. Man theile eine beliebige Seite in die gegebene Anzahl gleicher Theile, und verbinde alle Theilungspunkte mit dem Gegenwinkel dieser Seite; so ist das Verlangte geschehen (§. 115, Zus. 1.).

Zus. 1. Theilt man eine Seite eines Dreieckes in verhältnißmäßige Theile (§. 154.) und verbindet die Theilungspunkte mit der gegenüberliegenden Spitze; so ist das Dreieck selbst nach diesem Verhältniß getheilt (§. 164.).

Zus. 2. Auf dieselbe Art wird auch ein Parallelogramm in gleiche oder verhältnißmäßige Theile getheilt, wenn man eine Seite desselben in diese Theile theilt, und durch die Theilungspunkte zu einer der anstoßenden Seiten parallele Linien zieht.

§. 177.

Aufg. Ein Dreieck durch gerade Linien, die von einem in einer Seite gegebenen Punkte auslaufen, in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Man theile (Fig. 102.) die Seite AC, in welcher der gegebene Punkt D liegt, in die verlangte Anzahl (z. B. in 4) gleiche Theile, ziehe BD, und zu ihr durch alle Theilungspunkte parallele Linien, welche die Seiten AB und BC in K, L und M treffen, endlich DK, DL und DM; so ist die verlangte Theilung geschehen.

Bew. Man ziehe BE und BG, so ist $AE = CG = \frac{1}{4} AC$, daher auch $\triangle ABE = BCG = \frac{1}{4} ABC$ (§. 176.). Ferner hat man

$\triangle KED = KEB$ (wegen $KE \# BD$); also ist auch

$\triangle KED + AKE = KEB + AKE$. d. i.

$\triangle AKD = ABE = \frac{1}{4} ABC$. — Ebenso folgt

$\triangle$ CDM = BGC = $\frac{1}{4}$ABC. Ferner hat man
$\triangle$ KDL = AKD = $\frac{1}{4}$ABC, weil KL = AK (§. 139.).
Endlich ist BMDL = $\triangle$ ABC — (AKD + KDL + CDM)
= $\triangle$ ABC — $\frac{3}{4}$ABC = $\frac{1}{4}$ABC.

Zus. Auf dieselbe Art läßt sich ein Dreieck in verhältnißmäßige Theile theilen, wenn man AC nach diesem Verhältnisse theilt, und durch alle Theilungspunkte Parallelen zu BD zieht.

§. 178.

Aufg. Ein Dreieck in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien zu einer Seite parallel sind.

Aufl. Es sei $\triangle$ ABC (Fig. 103.) in drei gleiche Theile zu theilen. Man mache AD = DE = EC = $\frac{1}{3}$AC, beschreibe über AC einen Halbkreis, errichte auf AC in D und E die Perpendikel DF und EG, beschreibe aus A mit AF und AG Bogen, welche AC in H und K treffen, endlich durch H und K die zu BC parallelen Linien HL und KM; so ist durch diese das Verlangte geschehen.

Bew. Es ist $\triangle$ ALH $\sim$ AMK $\sim$ ABC (§. 146.); daher
$\triangle$ALH ÷ AMK ÷ ABC = $\overline{AH}^2 \div \overline{AK}^2 \div \overline{AC}^2$ (§. 167.), oder
= $\overline{AF}^2 \div \overline{AG}^2 \div \overline{AC}^2$ (Constr.)
= AC.AD ÷ AC.AE ÷ $\overline{AC}^2$ (§. 158, Z. II.)
= AD ÷ AE ÷ AC, oder
= AD ÷ 2AD ÷ 3AD, d. i.
= 1 ÷ 2 ÷ 3.

Hieraus folgt nun leicht:

$\triangle$ ALH = Trap. MH = Trap. BK = $\frac{1}{3}$ABC.

Zus. Auf ähnliche Art geschieht die Theilung nach einem gegebenen Verhältnisse.

§. 179.

Aufg. Ein Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Aufl. Man construire (Fig. 104.) über der Basis AB des zu verwandelnden Dreieckes ABC das gleichseitige $\triangle$AEB, ziehe dann die Höhen CD und EF beider, beschreibe über der größern Höhe (hier CD) einen Halbkreis, ziehe durch E die Gerade EG ‖ AB, welche CD in H schneidet, und DG; nehme hierauf DK = DG, führe durch K eine zu AB Parallele, welche die verlängerte FE

in L trifft, und ziehe endlich durch L die Geraden $LM \parallel AE$ und $LN \parallel BE$; so ist $\triangle LMN = ABC$.

Bew. Es ist $\triangle LMN \sim AEB$ (III.); also

$$\begin{aligned}
\triangle LMN \div AEB &= \overline{LF}^2 \div \overline{EF}^2 \text{ (§. 167, Zus.)} \\
&= \overline{DK}^2 \div \overline{DH}^2 \text{ (§. 98, Zus. 2.)} \\
&= \overline{DG}^2 \div \overline{DH}^2, \\
&= CD.DH \div \overline{DH}^2 \text{ (§. 158, Zus. II.); mithin}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1)\ \triangle LMN \div AEB &= CD \div DH. \text{ — Ferner ist} \\
2)\ \triangle ABC \div AEB &= CD \div EF \text{ (§. 165.), oder} \\
&= CD \div DH; \text{ also}
\end{aligned}$$

$$\triangle LMN = ABC \text{ (Arithm. §. 256, Zus. 3.).}$$

Zus. 1. Aus $\overline{DG}^2 = CD.DH$, oder $\overline{LF}^2 = CD.EF$ folgt $CD \div LF \div EF$, d. h. —?

Zus. 2. Jede geradlinige Figur läßt sich also auch in ein reguläres Dreieck verwandeln (Vgl. §. 134.).

§. 180.

Aufg. Eine geradlinige Figur von irgend einem in ihrem Perimeter liegenden Punkte A aus (Fig. 105.) nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Aufl. Man verwandle die gegebene Figur ABCDEF in das $\triangle ABG$ (§. 134.), theile die Seite BG in den Punkten H und J nach dem gegebenen Verhältnisse, und ziehe AH und AJ; so ist

$$\triangle ABH \div AHJ \div AJG = BH \div HJ \div JG \text{ (§. 164.).}$$

Hierauf ziehe man die Diagonale AC, und zu ihr durch H und J parallele Linien, welche die Seite CD oder deren Verlängerung in K und L treffen, dann AK und die Diagonale AD, und durch L die Linie $LM \parallel AD$, endlich noch AM; so ist die verlangte Theilung durch die Geraden AK und AM geschehen.

Bew. Da $HK \parallel AC$, so ist $\triangle AKC = AHC$, folglich auch $\triangle AKC + ABC = AHC + ABC$, d. i.

$$1)\ ABCK = \triangle ABH.$$

Zieht man noch AL, so ist wegen $LM \parallel AD$, $\triangle AMD = ALD$, daher auch $\triangle AMD + ACD = ALD + ACD$, d. i.

$$ACDM = \triangle ACL;$$

es ist aber, wegen $LJ \# AC$, $\triangle ACL = \triangle ACJ$, also

$ACDM = \triangle ACJ$, folglich auch

$ACDM + \triangle ABC = \triangle ACJ + ABC$, d. i.

$ABCDM = \triangle ABJ$, davon

$ABCK = \triangle ABH$ abgezogen, gibt

2) $AKDM = \triangle AHJ$.

Endlich ist $ABCDEF = \triangle ABG$ (Constr.), und

$ABCDM = \triangle ABJ$, daher auch

$ABCDEF - ABCDM = \triangle ABG - \triangle ABJ$, d. i.

3) $AFEM = \triangle AJG$.

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) folgt

$$ABCK \div AKDM \div AFEM = ABH \div AHJ \div AJG, \text{ d. i.}$$
$$= BH \div HJ \div JG.$$

§. 181.

Aufg. Aus den Seiten eines gleichschenkligen Dreieckes I. die Höhe und II. den Flächeninhalt desselben zu bestimmen.

Aufl. Ist die Länge der Basis b, die des Schenkels a, die zu suchende Höhe h und der Inhalt f, so erhält man:

$$\text{I.} \quad h = \tfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2a+b)(2a-b)};$$

$$\text{II.} \quad f = \tfrac{1}{4}b\sqrt{4a^2 - b^2} = \tfrac{1}{4}b\sqrt{(2a+b)(2a-b)}.$$

Bew. I. Zieht man die Höhe $BD = h$ (Fig. 44.), so ist $AD = \frac{1}{2}b$ (§. 97, III.), dann $\measuredangle\, \alpha = R$, daher

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$ (§. 120, Zus. 1.), oder

$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}(4a^2 - b^2)$; mithin $h = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$.

II. Für den Flächeninhalt haben wir $f = \frac{1}{2}bh$ (§. 172.); also durch Substitution des für h gefundenen Werthes:

$$f = \tfrac{1}{2}b \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2} = \tfrac{1}{4}b \cdot \sqrt{4a^2 - b^2}.$$

Zus. Setzt man in den Gleichungen I. und II. $b = a$, so ergibt sich für die Höhe und den Inhalt eines gleichseitigen Dreieckes:

$$\text{I. } h = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}; \text{ und II. } f = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3} = (\tfrac{1}{2}a)^2\sqrt{3}.$$

Anm. Man gebe die obigen vier Formeln in Worten!

§. 182.

Aufg. Man soll I. die Höhe (h), und II. den Flächeninhalt (f) eines Dreieckes aus seinen drei Seiten berechnen.

Aufl. u. Bew. I. Es sei (Fig. 30.) $AB = a$, $AC = b$ und $BC = c$, $BD = h$ und $AD = x$, also $CD = b - x$; so hat man, da $\measuredangle ADB = R$ ist:

1) $h^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$, ebenso

2) $h^2 = c^2 - (b - x)^2$; daher auch

$a^2 - x^2 = c^2 - (b - x)^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$. Hieraus folgt

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung 1) so wird

$$h^2 = \left(a + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)\left(a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)$$

$$= \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4b^2}$$

$$= \frac{((a + b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2)}{4b^2}$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}{4b^2}; \text{ also}$$

$$h = \frac{1}{2b}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$$

$$= \frac{2}{b}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

wenn man den halben Umfang des Dreieckes, d. i. $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$, also $a + b + c = 2s$ setzt; wodurch $a + b - c = a + b + c - 2c = 2s - 2c = 2(s - c)$, ebenso $a + c - b = 2(s - b)$, und $b + c - a = 2(s - a)$ wird.

II. Es ist $\triangle ABC = \frac{1}{2} AC.BD$, d. i. $f = \frac{1}{2}bh$; mithin wird durch Substitution obiger Werthe von h:

$$f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}, \text{ oder}$$

$$= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Zus. Nach dieser Formel (die sich auch für logarithm. Behandlung eignet) läßt sich jede geradlinige Figur berechnen, wenn man dieselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, und die Seiten und Diagonalen mit einerlei Maß mißt.

§. 183.

Aufg. Den Flächeninhalt (f) eines gleichseitigen Dreieckes zu bestimmen, wenn I. die Höhe (h), oder II. der Umfang (p) desselben gegeben ist.

Aufl. I. $f = \frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$. — II. $f = \frac{1}{36}p^2\sqrt{3} = (\frac{1}{6}p)^2.\sqrt{3}$.

Bew. I. Setzt man die Seite des Dreieckes $= a$; so hat man $f = \frac{1}{2}ah$ (§. 172.). Es ist aber $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ (§. 181, Zus. 1.), mithin $a = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$; daher durch Substitution: $f = \frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$.

II. Da $p = 3a$ (§. 171, Zus.), also $a = \frac{1}{3}p$, so ergibt sich die Formel II., wenn man diesen Werth von a in §. 181, Zus. II. substituirt.

§. 184.

Aufg. Den Inhalt (f) eines gleichschenkligen Dreieckes zu finden, wenn I. die Höhe (h) und ein Schenkel (a), oder II. die Basis (b) und der Umfang (p) gegeben ist.

Aufl. I. $f = h\sqrt{a^2 - h^2}$. — II. $f = \frac{1}{4}b\sqrt{p(p-2b)}$.

Bew. I. Es ist (Fig. 44.) $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$ oder $(\frac{1}{2}b)^2 = a^2 - h^2$, woraus $b = 2\sqrt{a^2 - h^2}$ folgt. Ferner ist $f = \frac{1}{2}bh$; mithin durch Substitution des Werthes von b die Formel I.

II. Setzt man den Schenkel $AB = a$, so hat man $2a + b = p$, (§. 171, Zus.), also $a = \frac{1}{2}(p - b)$. Substituirt man diesen Werth von a in §. 181, II.; so wird $f = \frac{1}{4}b\sqrt{p^2 - 2bp} = \frac{1}{4}b\sqrt{p(p-2b)}$.

§. 185.

Aufg. Den Inhalt (f) eines rechtwinkligen Dreieckes zu bestimmen, wenn I. die Hypotenuse (c) und eine Kathete (a); II. eine Kathete (a) und der Abstand der Hypotenuse vom Scheitel des rechten Winkels (p) gegeben sind.

Aufl. I. $f = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - a^2}$. — II. $f = \frac{1}{2}a^2p : \sqrt{a^2 - p^2}$.

Bew. I. Es sei $AB = a$, $BC = x$ (Fig. 65.); so ist $f = \frac{1}{2}ax$ (§. 172, Zus. 1.). Ferner hat man $x^2 = c^2 - a^2$, also $x = \sqrt{c^2 - a^2}$, und daher $f = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - a^2}$.

II. Da $\measuredangle ALB = R$, so wird $AL = \sqrt{a^2 - p^2}$. Ferner hat man $\overline{BL}^2 = CL . AL$, oder $p^2 = CL . \sqrt{a^2 - p^2}$, also $CL = p^2 : \sqrt{a^2 - p^2}$. Endlich ist $\overline{BC}^2 = p^2 + \overline{CL}^2 = p^2 + \frac{p^4}{a^2 - p^2} = \frac{a^2 p^2}{a^2 - p^2}$; mithin $BC = ap : \sqrt{a^2 - p^2}$. Substituirt man diesen Werth von BC in $f = \frac{1}{2} a . BC$, so erhält man die Gleichung II.

§. 186.

Aufg. Den Flächeninhalt (f) eines Parallelogrammes zu finden, wenn I. zwei anliegende Seiten (a u. b) und eine Diagonale (d), oder II. eine Seite (a) und die beiden Diagonalen (d und δ) bekannt sind.

Aufl. I. $f = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+d)(a+b-d)(a+d-b)(b+d-a)}$.

II. $f = \frac{1}{4}\sqrt{(2a+d+\delta)(2a+d-\delta)(2a+\delta-d)(d+\delta-2a)}$.

Bew. I. Ergibt sich mittelst §. 98, Zus. 1. aus §. 182, II.

II. Es wird das gegebene Parallelogramm durch die beiden Diagonalen in vier gleiche Dreiecke getheilt; denn da sich dieselben gegenseitig halbiren (§. 101.), so haben je zwei nebeneinander liegende Dreiecke, z. B. (Fig. 47.) AEB und AED gleiche Basis und gemeinsame Spitze. Es wird somit der Inhalt des Parallelogrammes, d. i. $f = 4 . \triangle AED$, von welchem die Seiten a, $\frac{1}{2}d$ und $\frac{1}{2}\delta$ bekannt sind; daher die Formel II. (nach §. 182.).

Zus. 1. Der Inhalt (f) eines **Rhombus** ist dem halben Produkte seiner beiden Diagonalen (d und δ) gleich. Denn die eine BD (Fig. 48.) theilt ihn in zwei Dreiecke, deren jedes die Hälfte der andern Diagonale AC als Höhe hat (§. 101, Zus. 2.); daher ist $f = \frac{1}{2} BD (AE + CE) = \frac{1}{2} d . AC = \frac{1}{2} d \delta$.

Zus. 2. Da im **Quadrate** die Diagonalen einander gleich sind (§. 101, Zus. 1.); so ergibt sich für den Inhalt (f) desselben, wenn die Diagonale (d) bekannt ist: $f = \frac{1}{2} d^2$, d. h. —?

§. 187.

Aufg. Aus den vier Seiten eines Trapeziums den Flächeninhalt (f) desselben zu berechnen.

Aufl. u. Bew. Es sei (Fig. 97.) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $AD = d$. Nun ist (nach §. 174.):

$$f = \tfrac{1}{2}(BC + AD) . AE = \tfrac{1}{2}(b + d) . AE.$$

Um die Höhe AE aus den gegebenen Stücken zu bestimmen, ziehe man $AF \# CD$, so ist $AF = CD = c$, und $CF = AD = d$ (§. 98, Zus. 2.), mithin $BF = b - d$. Es wird somit, wenn man noch die Differenz der Parallelseiten $b - d = n$ setzt (nach §. 182, I.):

$$AE = \frac{1}{2n}\sqrt{(a+c+n)(a+c-n)(a+n-c)(c+n-a)};\ \text{also}$$

$$f = \frac{b+d}{4n} . \sqrt{(a+c+n)(a+c-n)(a+n-c)(c+n-a)}.$$

Zus. Ist das Trapez gleichschenklig, also $c = a$, so verwandelt sich vorstehende Formel in

$$f = \tfrac{1}{4}(b+d)\sqrt{(2a+n)(2a-n)} = \tfrac{1}{4}(b+d)\sqrt{4a^2-(b-d)^2},\ \text{d. h.} - ?$$

Anhang. Einiges über die geometrische Construction algebraischer Ausdrücke.

§. 188.

Erkl. 1. Einen algebraischen Ausdruck (oder eine algebraische Aufgabe) geometrisch construiren, heißt den Werth der Unbekannten durch Linien ausdrücken.

2. Für jede Zahl kann eine Linie gefunden werden, welche, in Bezug auf eine gewisse lineare Einheit, jene Zahl vorstellt.

§. 189.

Aufg. Die Ausdrücke I. $x = a + b$, und II. $x = a - b$ geometrisch zu construiren.

Aufl. I. Man nehme (Fig. 9.) eine (hinreichend lange) Linie CD, trage auf dieser $CE = a$, dann nach derselben Richtung $EF = b$ auf; so ist $CF = CE + EF$, oder $x = a + b$.

II. Man trage (Fig. 1.) auf einer Geraden $AB = a$ in entgegengesetzter Richtung, von B nach A hin, das Stück $BC = b$ auf; so ist offenbar $AC = AB - BC$, oder $x = a - b$.

Zus. Aehnlich lassen sich auch folgende Ausdrücke construiren: 1) $x = a + b + c$; 2) $x = a + b - c$; 3) $x = (a + b) - (c + d)$ 2c.

§. 190.

Aufg. Es sollen die Ausdrücke I. 3a, II. $\frac{3}{4}$a, III. $1\frac{1}{2}$a construirt werden, wenn a eine gerade Linie vorstellt.

Aufl. I. Man verlängere die Gerade a, und trage dieselbe auf der Verlängerung noch zweimal so ab, daß der Endpunkt eines jeden Theiles der Anfangspunkt des nächstfolgenden werde (§. 24.).

II. Man theile a in vier gleiche Theile, (§. 154, Zus. 1.) und nehme drei von ihnen.

III. Man setze an a noch $\frac{1}{2}$a; oder construire den Ausdruck 3a, und halbire die erhaltene Linie.

Zus. Auf ähnliche Art lassen sich folgende Ausdrücke construiren: 1) $x = \frac{3}{5}a$; 2) $x = \frac{1}{2}(a - b)$; 3) $x = 2a - \frac{2}{3}b$ 2c.

§. 191.

Aufg. Es sollen folgende Ausdrücke construirt werden:

I. $x = \frac{bc}{a}$; II. $x = \frac{b^2}{a}$; III. $x = \frac{ab \pm c^2}{d}$; IV. $x = \frac{cde}{ab}$.

Aufl. I. Es ist hier x die vierte Proportionale zu a, b und c, deren Construction §. 157, I. enthält. Denn aus I. folgt $ax = bc$, und hieraus $a \div b = c \div x$.

II. Man suche (nach §. 157, II.) die dritte Proportionale zu a und b. Denn aus II. folgt $ax = b^2$; also $a \div b \div x$.

III. Man construire zuerst (nach I.) $d \div a = b \div y$; dann $d \div c \div z$ (nach II.), und verfahre mit den erhaltenen Linien y und z nach §. 189. Denn es ist dann

$$y \pm z = \frac{ab}{d} \pm \frac{c^2}{d} = \frac{ab \pm c^2}{d} = x$$

IV. Man construire zuerst y mittelst der Proportion

$a \div c = d \div y$, dann x mittelst

$b \div e = y \div x$ (nach I.). Denn es folgt hieraus

$ab \div ce = d \div x$; also $x = cde : ab$.

Anm. Welche Verwandlungsaufgaben sind in den Formeln I., II. und III. enthalten? (Vgl. §. 173, Zuss).

§. 192.

Aufg. Man soll folgende Ausdrücke construiren: I. $x = \sqrt{ab}$; II. $x = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$; III. $x = \sqrt{\frac{1}{2}(a+b)h}$; IV. $x = a\sqrt{n}$ (wobei n irgend eine absolute Zahl bezeichnet).

Aufl. In allen vier Fällen ist x eine mittlere Proportional-linie, deren Construction nach §. 158. geschehen kann. Denn es folgt aus I. $x^2 = ab$, und hieraus $a \div x \div b$;
" II. $x^2 = \frac{1}{2}ab$, " " $\frac{1}{2}a \div x \div b$;
" III. $x^2 = \frac{1}{2}(a+b)h$, " " $\frac{1}{2}(a+b) \div x \div h$; endlich
" IV. $x^2 = na^2 = na.a$, " " $na \div x \div a$.

Anm. 1. Welche Verwandlungsaufgaben enthalten obige vier Formeln? (Vgl. §§. 172—174.).

Anm. 2. Wenn $x^2 = ab$, so ist $x = \pm\sqrt{ab}$. Das doppelte Zeichen zeigt hier nur an, daß die mittlere Proportionale (x) doppelt construirt werden kann, nämlich auf beiden Seiten einer Linie (z. B. oberhalb und unterhalb A B, Fig. 78. und 88.).

§. 193.

Aufg. Es sollen construirt werden: I. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; II. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$; III. $x = \sqrt{a^2 \pm \frac{1}{4}b^2}$; IV. $x = \sqrt{a^2 \pm bc}$.

Aufl. I. Man construire die Hypotenuse eines rechtw. Dreieckes, dessen Katheten a und b sind (§. 135.); denn es ist dann

$$x^2 = a^2 + b^2; \text{ mithin } x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

II. Man construire entweder (nach §. 158.) den Ausdruck $x = \sqrt{(a+b)(a-b)}$; oder (nach §. 136, I.) die Kathete eines rechtw. Dreieckes, dessen Hypotenuse a und andere Kathete b ist.

III. Es ist $x = \sqrt{a^2 \pm \frac{1}{4}b^2} = \sqrt{a^2 \pm (\frac{1}{2}b)^2}$. Die Construction dieses Ausdruckes geschieht nach I, oder II.

IV. Setzt man $bc = m^2$, also $m = \sqrt{bc}$, so ist $x = \sqrt{a^2 \pm m^2}$, welcher Ausdruck sich nach I. oder II. construiren läßt, sobald m (nach §. 192, I.) construirt ist.

Zus. Soll $x = \sqrt{a^2 + b^2 \pm c^2}$ construirt werden; so setze man $a^2 + b^2 = m^2$, also $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ und construire diesen Ausdruck (nach I.), und hierauf $x = \sqrt{m^2 \pm c^2}$.

§. 194.

Aufg. Es soll I. $x = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; II. $x = a\sqrt{3}$; III. $x = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$ geometrisch construirt werden.

Aufl. Diese Gleichungen lassen sich sämmtlich nach §. 192, IV., oder auch mit Anwendung des pythagor. Lehrsatzes construiren. Denn es ist

I. $x = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{4}a^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2}$; dann

II. $x = a\sqrt{3} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$; endlich

III. $x = \frac{1}{2}a\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{a^2 + (\frac{1}{2}a)^2}$.

Zus. Nach III. läßt sich nun auch leicht der Ausdruck: $x = \frac{1}{2}a\left(\sqrt{5} - 1\right) = \frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{1}{2}a$ construiren. (Vgl. §. 159.)

§. 195.

Aufg. Eine Gerade (a) soll so in zwei Theile getheilt werden, daß das Rechteck aus beiden Stücken gleichen Inhalt habe mit einem Quadrate, dessen Seite b ist.

Aufl. Es sei das eine Stück der zu theilenden Linie x, so ist das andere a — x; dann hat man

$x(a - x) = b^2$, oder $x^2 - ax = -b^2$. Hieraus folgt:

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - b^2}.$$

Constr. und Bew. Man mache (Fig. 106.) AB = a, halbire AB in C, und beschreibe aus C mit dem Radius $CA = \frac{1}{2}a$ einen Halbkreis, errichte dann in B eine Senkrechte BD = b, ziehe DE ∦ AB, und dann noch EF ⊥ AB; so ist F der verlangte Theilungspunkt. Denn es ist, wenn man CE zieht,

$$\overline{CF}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{EF}^2 = (\frac{1}{2}a)^2 - b^2; \text{ mithin}$$

$$CF = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - b^2}. \text{ — Ferner ist}$$

$$\left.\begin{array}{l} AF = AC + CF \\ BF = BC - CF \end{array}\right\} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - b^2} = \left\{\begin{array}{l} x \\ a - x. \end{array}\right.$$

§. 196.

Aufg. Eine Gerade (a) soll so verlängert werden, daß das Rechteck aus der Verlängerung und der verlängerten Linie einem Quadrate gleich sei, dessen Seite b ist.

Aufl. Der Aufgabe gemäß soll, wenn die Verlängerung x ist, $x(a + x) = b^2$ sein. Man findet hieraus:

$$x = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + b^2} - \frac{1}{2}a.$$

Constr. und Bew. Man mache AB = a (Fig. 90.), und halbire AB in C, errichte hierauf in B eine Senkrechte BD = b, ziehe CD, und beschreibe mit dem Radius CD einen Bogen, der die verlängerte AB in E trifft, so ist BE = x; denn es ist

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2, \text{ oder } \overline{CE}^2 = (\tfrac{1}{2}a)^2 + b^2; \text{ somit}$$

$$CE = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a)^2 + b^2}.$$

Nun ist aber CE = BC + BE; also

$$BE = CE - BC = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a)^2 + b^2} - \tfrac{1}{2}a = x.$$

§. 197.

Aufg. Eine Gerade (a) so in zwei Theile zu theilen, daß das Quadrat des einen Stückes gleich sei dem Rechtecke, welches mit dem andern Stücke und einer zweiten Linie (b) construirt wird.

Aufl. Ist der eine Theil der Linie x, so ist der andere a — x, und daher der Aufgabe gemäß $x^2 = (a - x)\,b$.

Hieraus findet man $x = \sqrt{ab + (\tfrac{1}{2}b)^2} - \tfrac{1}{2}b$.

Constr. u. Bew. Man verlängere (Fig. 107.) AB = a so, daß die Verlängerung BC = b wird, beschreibe über AC einen Halbkreis, errichte in B die Linie BD ⊥ AC, halbire BC in E, und beschreibe endlich aus E mit dem Radius ED einen Bogen, der AB in F trifft; so ist AF = x. Denn es ist

$$\overline{DE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BE}^2, \text{ oder,}$$

$$\overline{EF}^2 = AB.BC + \overline{BE}^2 = ab + (\tfrac{1}{2}b)^2; \text{ mithin}$$

$$EF = \sqrt{ab + (\tfrac{1}{2}b)^2}. \text{ Ferner ist}$$

$$FB = EF - BE = \sqrt{ab + (\tfrac{1}{2}b)^2} - \tfrac{1}{2}b = x.$$

§. 198.

Aufg. Man soll die Seite eines Quadrates construiren, dessen Inhalt der Flächensumme zweier Rechtecke gleich ist.

Aufl. Sind a, b, dann c, d die Seiten der beiden Rechtecke, so ist der Bedingung gemäß $x^2 = ab + cd$; mithin

$$x = \sqrt{ab + cd}.$$

Constr. und Bew. Man nehme (Fig. 108.) zwei sich in A rechtwinklig durchschneidende Gerade, mache AB = a, AC = b,

ebenso $AD = c$ und $AE = d$, beschreibe dann über BC nnd DE Halbkreise, welche die angenommenen Linien in F und G schneiden; so ist die Linie $FG = x$. Denn es ist

$$\overline{FG}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AG}^2, \text{ oder (nach §. 158, Zus. l.)}$$
$$= AB.AC + AD.AE = ab + cd; \text{ also}$$
$$FG = \sqrt{ab + cd} = x.$$

§. 199.

Aufg. Ein Dreieck, dessen Basis b und Höhe h ist, soll in ein Rechteck verwandelt werden, dessen Umfang dem eines Quadrates gleich ist, das die Seite a hat.

Aufl. Es seien x und y zwei anstoßende Seiten des zu construirenden Rechteckes; so ist der Aufgabe gemäß

1) $xy = \frac{1}{2}bh$, und 2) $2(x + y) = 4a$ (§. 171, Zus.).

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt die symmetr. Werthe:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = a \pm \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}bh}.$$

Constr. u. Bew. Man verlängere (Fig. 109.) die Basis $AC = b$ des gegebenen Dreieckes ABC so, daß die Verlängerung $AE = \frac{1}{2}h$ wird, beschreibe über CE einen Halbkreis, errichte $AF \perp AC$, nehme dann von F aus $FG = a$, und beschreibe aus G mit dem Radius GF noch einen Halbkreis, der AC, oder deren Verlängerung in H und K schneidet; so sind AK und AH die gesuchten Rechtecksseiten. Denn es ist

$$\overline{AG}^2 = \overline{FG}^2 - \overline{AF}^2 = a^2 - AC.AE$$
$$= a^2 - \frac{1}{2}bh; \text{ also}$$
$$AG = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}bh}. \text{ — Ferner ist}$$
$$\left.\begin{matrix} AK = GK + AG \\ AH = GH - AG \end{matrix}\right\} = a \pm \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}bh} = \left\{\begin{matrix} x \\ y. \end{matrix}\right.$$

§. 200.

Aufg. Es sollen zwei Gerade gefunden werden, deren Quadrate zusammen einem gegebenen Quadrate (a^2), und deren Rechteck einem gegebenen Rechtecke (bc) gleich ist.

Aufl. Die Linien seien x und y, so ist zufolge der Aufgabe

1) $x^2 + y^2 = a^2$, und 2) $xy = bc$.

Aus 2) ist $y = bc : x$. Substituirt man diesen Werth in 1), so wird

$$x^2 + \frac{b^2c^2}{x^2} = a^2.$$ Hieraus findet man

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4b^2c^2})}.$$

Constr. Das oben gefundene Resultat ist einerlei mit

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \sqrt{a\left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{bc}{a}\right)^2}\right)}.$$

Man construire den Ausdruck $z = bc : a$ (nach §. 191, I.), nehme dann (Fig. 106.) $AB = a$, halbire AB in C, beschreibe darüber einen Halbkreis, errichte in B die Senkrechte $BD = z = bc : a$, ziehe hierauf $DE \# AB$, endlich AE und BE; so sind diese die gesuchten Linien.

Bew. Zieht man $EF \perp AB$, so ist $\sphericalangle AEB = R$ (§. 137, Zus. 2.); daher (nach §. 143, I.)

$AB \div AE \div AF$, oder $a \div AE \div AF$; somit

$$\overline{AE}^2 = a . AF = a(\tfrac{1}{2}a + CF);$$ also

a) $AE = \sqrt{a(\frac{1}{2}a + CF)}$. — Ebenso ist

$AB \div BE \div BF$, oder $a \div BE \div (\frac{1}{2}a - CF)$; folglich

b) $BE = \sqrt{a(\frac{1}{2}a - CF)}$.

Zieht man noch CE, so ist $\overline{CF}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{EF}^2$, oder

$$\overline{CF}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{bc}{a}\right)^2,$$ da $EF = BD = \frac{bc}{a}$ ist; also

$$CF = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{bc}{a}\right)^2}.$$

Dieser Werth von CF in die Gleichungen a) und b) substituirt gibt:

$$\left.\begin{matrix} AE \\ BE \end{matrix}\right\} = \sqrt{a\left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{bc}{a}\right)^2}\right)} = \left\{\begin{matrix} x \\ y. \end{matrix}\right.$$ *)

---

*) Zahlreiche Beispiele über alles bisher Behandelte, sowie über das Nachfolgende findet man in Dr. Pollak: Sammlung mathem. Aufgaben, III. Abthl. Augsburg, Matth. Rieger'sche Buchhandlung.

B. Vom Kreise.

§. 201.

Erkl. Der Kreis (Circulus) ist jene ebene Figur, welche von einer Kreislinie begrenzt wird (§. 21.), oder eine Kreislinie zur Peripherie hat (§. 65.).

Zus. 1. Kreise mit gleichen Radien sind congruent. Ein Kreis ist daher durch seinen Mittelpunkt und Radius vollkommen (seiner Lage und Größe nach) bestimmt.

Zus. 2. Alle Kreise sind ähnlich.

Zus. 3. Jeder Diameter halbirt den Kreis, theilt ihn in zwei Halbkreise; denn er halbirt die Peripherie (§. 22.).

§. 202.

Lehrs. Zieht man zwischen drei nicht in einer geraden Linie liegenden Punkten zwei Gerade und halbirt dieselben durch Senkrechte; so schneiden sich diese im Mittelpunkte eines Kreises, dessen Peripherie durch jene drei Punkte geht.

Dat. $AE = \frac{1}{2}AB$, $BF = \frac{1}{2}BD$; $\measuredangle AEG = R = BFH$ (Fig. 110.).

Thes. $AC = BC = DC$.

Bew. Die beiden Lothe müssen sich in einem Punkte C schneiden (§. 47.). Ferner hat der Punkt C sowohl von A und B, als auch von B und D gleiche Entfernung (§. 97, Zus. 3.); es ist also $AC = BC = DC$, und daher geht der aus C mit dem Radius AC beschriebene Kreis durch die drei gegebenen Punkte.

Zus. 1. Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte ist also ein Kreis vollkommen bestimmt; aber nur ein einziger.

Zus. 2. Die Peripherien zweier Kreise können sich nur in zwei Punkten schneiden (Zus. 1.).

§. 203.

Erkl. 1. Jeder Theil der Kreisfläche, welcher von einem Bogen und der zugehörigen Sehne begrenzt wird, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment.

Die Sehne AB (Fig. 111.) nennt man Basis, die Senkrechte FG, welche im Halbirungspunkte der Basis errichtet wird, die Höhe (oder den Pfeil) des Segmentes.

2. Ein Theil der Kreisfläche, welcher von einem Bogen und den zwei an seine Endpunkte gezogenen Radien eingeschlossen ist, wird Kreisausschnitt oder Sector genannt, z. B. DCE.

Quadrant, Sextant (vgl. §. 21, 2.).

Zus. Jede Sehne theilt den Kreis in zwei Abschnitte, jedes Paar Radien in zwei Ausschnitte.

§. 204.

Erkl. 1. Kreise, welche um denselben Mittelpunkt beschrieben sind, nennt man concentrisch, außerdem excentrisch. — Die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise heißt Centrallinie oder Centrale (auch Achse).

2. Die zwischen den Peripherien zweier concentrischer Kreise liegende Fläche wird Kreisring oder Ringebene, und die Differenz der Radien beider Kreise die Breite des Ringes genannt.

3. Kreise, deren Peripherien nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben, nennt man Berührungskreise, jenen Punkt den Berührungspunkt.

I. Kap. Der Kreis in Verbindung mit geraden Linien.

§. 205.

Erkl. Außer den §. 21. angeführten Stücken kommen beim Kreise noch folgende Linien in Betracht:

1) Die Tangente (Berührungslinie), eine Gerade, welche mit der Peripherie des Kreises nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich hat, den man Berührungspunkt nennt;

2) die Secante (Schneidelinie), jede Gerade, welche den Kreisumfang schneidet, also jede verlängerte Sehne.

a) Theoretische Sätze.

§. 206.

Lehrs. Die Senkrechte vom Mittelpunkte auf eine Sehne halbirt sowohl I. diese, als auch II. den zugehörigen Bogen.

Dat. $CD \perp AB$ (Fig. 112.).

Thes. I. $AD = BD$. — II. arc. $AE = BE$.

Bew. Zieht man die Radien AC und BC, so ist $\triangle ABC$ gleichschenklig; daher $AD = BD$, dann $\angle ACE = BCE$ (§. 97, III.); also auch arc. $AE =$ arc. BE (§. 36, I.).

Zus. 1. Eine Gerade vom Mittelpunkte eines Kreises an den Halbirungspunkt einer Sehne, steht auf letzterer senkrecht (§. 97, II.).

Zus. 2. Die im Halbirungspunkte einer Sehne errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises, wird also, gehörig verlängert, ein Diameter (§. 97, Zus. 1.).

Zus. 3. Werden zwei aparallele Sehnen durch Perpendikel halbirt, so schneiden sich diese im Mittelpunkte (Zus. 2.).

§. 207.

Lehrs. Gleiche Sehnen sind in demselben Kreise gleichweit vom Mittelpunkte entfernt.

Dat. $AB = EF$; $\angle ADC = R = EGC$ (Fig. 113.).

Thes. $CD = CG$.

Bew. Da $AB = EF$, so ist auch $AD = EG$ (§. 206, I.). Zieht man noch die Radien AC und EC, so hat man

$\triangle ACD \cong ECG$ (IV.); mithin $CD = CG$.

Zus. Sind umgekehrt Sehnen eines Kreises gleichweit vom Mittelpunkte entfernt, so sind sie gleich.

§. 208.

Lehrs. Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises ist die kleinere weiter vom Mittelpunkte entfernt, als die größere.

Dat. $AB < EF$; $\angle CDA = R = CGE$ (Fig. 114.).

Thes. $CD > CG$.

Bew. Weil $AB < EF$, so ist auch $AD < EG$ (§. 206, I.); ferner ist, wenn man die Radien AC und CE zieht,

$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ (§. 120.) und

$\overline{CE}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{CG}^2$; daher, wegen $AC = CE$,

$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{CG}^2$; hievon

$\overline{AD}^2 < \overline{EG}^2$ subtrahirt, gibt

$\overline{CD}^2 > \overline{CG}^2$; also ist auch $CD > CG$.

Zus. 1. Sind umgekehrt Sehnen nicht gleichweit vom Mittelpunkte entfernt, so ist die weniger entfernte die größere.

Zus. 2. Der Diameter ist größer als jede andere Sehne.

†§. 209.

Lehrs. Eine Gerade, welche auf einem Radius (oder Diameter) in dessen Endpunkt senkrecht steht, ist eine Tangente.

Dat. $\measuredangle$ BAD = R (Fig. 115.).

Bew. Da $\measuredangle$ BAD = R, so ist jede Gerade CF, welche aus C an DE gezogen wird, größer als AC (§. 93, Zus. 1.); daher liegen alle Punkte von DE außerhalb der Peripherie (§. 21, Zus. 3.), mit welcher sie nur den einzigen Punkt A gemeinschaftlich hat. Sie ist also eine Tangente.

Zus. 1. Umgekehrt steht die Tangente immer senkrecht auf dem an ihren Berührungspunkt gezogenen Radius. Denn der Radius ist die kürzeste Linie vom Mittelpunkte an die Tangente (§. 94.).

Zus. 2. In einem Punkte der Peripherie gibt es nur eine einzige Tangente (Zus. 1. und §. 31.).

Zus. 3. Ein im Berührungspunkte einer Tangente errichtetes Perpendikel geht durch den Mittelpunkt des Kreises (Zus. 1. u. §. 31.).

§. 210.

Lehrs. Ist die Centrallinie zweier Kreise I. gleich der Summe, oder II. gleich der Differenz ihrer Radien; so berühren sich die Kreise und zwar im I. Falle von außen, im II. von innen.

I. Dat. BC = AC + AB (Fig. 116.).

Bew. Die Peripherien beider Kreise haben den Punkt A gemeinschaftlich, aber auch nur diesen; denn zieht man an irgend einen Punkt D des Kreises um B die Geraden BD und CD; so ist BD + CD > BC (§. 76, I.), oder

BD + CD > AB + AC; mithin, weil BD = AB ist,

CD > AC.

Es liegt also D außerhalb des Kreises um C; beide Kreise berühren sich somit von außen.

II. Dat. CM = CE — ME (Fig. 116.).

Bew. Beide Kreise haben den Punkt E gemeinschaftlich, aber auch nur diesen. Denn zieht man an irgend einen Punkt F des Kreises um M die Geraden CF und MF, so ist

CM > CF — MF (§. 76, II.), oder

CE — ME > CF — MF, oder, weil ME = MF ist,

CE > CF.

Es liegt also F innerhalb des Kreises um C; somit berührt der Kreis um M den um C von innen.

Zus. 1. Berühren sich umgekehrt zwei Kreise; so ist die Centrale gleich der Summe oder Differenz der Radien, je nachdem die Berührung eine äußere oder innere ist.

Zus. 2. Die Centrale zweier Berührungskreise geht durch deren Berührungspunkt.

b) Praktische Sätze.

§. 211.

Aufg. Zu einem gegebenen Kreise oder Kreisbogen den Mittelpunkt zu finden.

Aufl. u. Bew. Man nehme (Fig. 110.) drei willkührliche Punkte A, B und D, ziehe die Sehnen AB und BD, halbire sie durch die Senkrechten EG und FH; so ist der Durchschnittspunkt C dieser letztern der gesuchte Mittelpunkt (§. 206, Zus. 3.).

§. 212.

Aufg. Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren.

Aufl. u. Bew. Man ziehe, wenn (Fig. 112.) AEB der gegebene Bogen ist, die zugehörige Sehne AB, halbire diese in D, und errichte DE $\perp$ AB; so ist der Bogen halbirt (§. 206, II.).

Zus. Durch wiederholte Halbirung wird der Bogen nach und nach in 4, 8, 16 .... 2^n gleiche Theile getheilt.

§. 213.

Aufg. Durch einen gegebenen Peripheriepunkt eines Kreises eine Tangente zu ziehen.

Aufl. u. Bew. Man ziehe (Fig. 115.) an den gegebenen Punkt A den Radius CA, und errichte auf ihn in A die Senkrechte DE; so ist diese die verlangte Tangente (§. 209.).

§. 214.

Aufg. An einen Kreis eine Tangente zu legen, welche durch einen außerhalb desselben gegebenen Punkt geht.

Aufl. Man verbinde den gegebenen Punkt A (Fig. 117.) mit C durch die Gerade AC, errichte in B auf AC eine Senkrechte von unbestimmter Länge, beschreibe aus C mit dem Radius

CA einen Bogen, der die Senkrechte in D schneidet, und ziehe CD; so berührt die durch A und E gezogene Gerade den Kreis.

Bew. Es ist $\triangle$ CAE $\cong$ CBD (I.); mithin auch $\measuredangle$ CEA = CBD = R; also AE eine Tangente (§. 209.).

Zus. Durch einen Punkt außerhalb eines Kreises gibt es an diesen stets zwei Tangenten. Denn es ist klar, daß dieselbe Construction auch auf der andern Seite von AC ausgeführt werden kann.

§. 215.

Aufg. In einen Kreis eine Sehne von gegebener Länge einzutragen, welche I. zu einer gegebenen Geraden parallel ist, oder II. gehörig verlängert, durch einen gegebenen Punkt geht.

Aufl. u. Bew. Man trage die gegebene Linie (welche kleiner sein muß, als der Diameter) beliebig als Sehne AB (Fig. 118.) in den Kreis, ziehe aus dessen Mittelpunkt CD $\perp$ AB, beschreibe aus C mit dem Radius CD einen Hilfskreis, fälle dann

I. auf die gegebene Gerade MN das Perpendikel CE und ziehe durch F die Linie GH $\perp$ CE; so ist GH $\#$ MN (§. 43, Zus. 1.) und GH = AB (§. 207, Zus.).

II. Man lege an den Hilfskreis eine Tangente, welche durch den gegebenen Punkt L geht; so ist das Stück GH derselben eine der Aufgabe entsprechende Sehne (§. 207, Zus.).

§. 216.

Aufg. Aus dem Radius (r) eines Kreises, und einer Sehne (a) die Entfernung (δ) der letztern vom Mittelpunkte zu bestimmen.

Aufl. $\delta = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2r+a)(2r-a)}$.

Bew. Fällt man (Fig. 112.) CD $\perp$ AB, so ist AD = $\frac{1}{2}$AB = $\frac{1}{2}$a, dann CD = δ (§. 94, Zus. 1.). Ferner hat man

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}(4r^2 - a^2); \text{ also}$$

$$\delta = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Zus. Aus vorstehender Gleichung folgen umgekehrt:

I. $r = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \delta^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4\delta^2}$, und

II. $a = 2\sqrt{r^2 - \delta^2} = 2\sqrt{(r+\delta)(r-\delta)}$, d. h. — ?

§. 217.

Aufg. Mit gegebenen Radien zwei Kreise zu beschreiben, die sich in einem gegebenen Punkte berühren.

Aufl. u. Bew. Man ziehe (Fig. 119.) durch den gegebenen Punkt A willkührlich eine Gerade, schneide auf einer oder beiden Seiten von A die gegebenen Radien z. B. AC und AB ab, und beschreibe aus C und B durch den Punkt A Kreise; so berühren sich diese in A. Denn sie haben den Punkt A gemeinschaftlich, welcher überdieß in der Centrallinie liegt (§. 210.).

Zus. Auf ganz ähnliche Art löst man die Aufgabe: Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen in einem bestimmten Punkte berührt.

II. Kap. Von den Winkeln und Proportionen am Kreise.

§. 218.

Erkl. In Verbindung mit dem Kreise heißt ein Winkel:

1) Innenwinkel, wenn sein Scheitel innerhalb der Peripherie liegt. Dahin gehören: a) der Sehnenwinkel, dessen Schenkel die Stücke zweier sich schneidender Sehnen sind; b) der Centriwinkel (oder Centralwinkel), dessen Spitze im Mittelpunkte liegt, dessen Schenkel also Radien sind;

2) Winkel im Umfange, wenn er seinen Scheitel in der Peripherie hat. Er heißt a) Peripheriewinkel, wenn seine Schenkel Sehnen sind, — und insbesondere Winkel im Halbkreise, wenn sie durch die Endpunkte eines Diameters gehen; b) Berührungs- oder Abschnittswinkel, wenn er eine Sehne und eine Tangente als Schenkel hat;

3) Außenwinkel, wenn sein Scheitel außerhalb der Peripherie liegt, seine Schenkel also a) zwei Secanten oder b) zwei Tangenten, oder c) eine Secante und eine Tangente sind.

Von dem Bogen, welcher zwischen den Schenkeln von einem dieser Winkel liegt, und der Spitze die concave Seite zukehrt, sagt man: der Winkel stehe oder ruhe auf ihm.

Zus. Das Maß eines Centriwinkels ist der Bogen, auf welchem seine Schenkel ruhen (§. 60, Zus.).

a) Theoretische Sätze.

§. 219.

Lehrs. Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen, Sehnen, Ausschnitte und Abschnitte.

Dat. $\measuredangle$ ACE = BCE (Fig. 112.).

Thes. arc. AE = arc. BE; chord. AE = ch. BE ꝛc.

Bew. Denkt man sich $\measuredangle$ ACE auf $\measuredangle$ BCE gelegt, so decken sich Bogen und Sehnen (§. 36.), und zugleich erscheinen die Ausschnitte ACE und BCE und die Abschnitte AE und BE als Theile des Kreises, welche zwischen einerlei Grenzen liegen; sind mithin congruent.

Zus. 1. Der Lehrsatz gilt für alle Fälle auch umgekehrt, d. h. es gehören zu gleichen Bogen gleiche Sehnen, Centriwinkel, Ausschnitte und Abschnitte; zu gleichen Sehnen gleiche Bogen, Centriwinkel u. s. f.

Zus. 2. Die Gerade, welche einen Centriwinkel halbirt, halbirt auch den Bogen und den Ausschnitt, und umgekehrt.

Zus. 3. Die Senkrechte, welche vom Mittelpunkte auf eine Sehne gefällt wird, halbirt den zugehörigen Centriwinkel; denn sie halbirt den Bogen (§. 206, II.).

Zus. 4. Der Radius an den Halbirungspunkt eines Bogens halbirt die zum Bogen gehörige Sehne und steht auf ihr senkrecht. Denn ist arc. AE = BE, so ist $\measuredangle$ ACE = BCE (Zus. 1.); daher AD = BD, und CD $\perp$ AB (§. 97, I.).

Zus. 5. Durch den Centriwinkel ist der Bogen, die Sehne, der Ausschnitt und Abschnitt bestimmt, und umgekehrt.

§. 220.

Lehrs. Jeder Peripheriewinkel ist die Hälfte seines, d. h. desjenigen Centriwinkels, der mit ihm auf demselben Bogen ruht.

Thes. $\measuredangle$ ABD = $\frac{1}{2}$ACD (Fig. 120 — 122.).

Bew. Wir unterscheiden rücksichtlich der Lage des Mittelpunktes in Bezug auf die Schenkel des Peripheriewinkels drei Fälle:

I. Liegt der Mittelpunkt des Kreises (Fig. 120.) in einem Schenkel des Peripheriewinkels, so ist, da AC=BC, $\measuredangle$BAC=ABC, ferner $\measuredangle$ BAC + ABC = 2ABC = ACD (§. 78.); also

$\measuredangle$ ABC = $\frac{1}{2}$ACD.

II. Liegt der Mittelpunkt (Fig. 121.) zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels, und man zieht den Durchmesser BE, so ist

$$\begin{aligned}\measuredangle\, ABE &= \tfrac{1}{2} ACE \text{ (I. Fall); ebenso}\\ \measuredangle\, DBE &= \tfrac{1}{2} DCE\text{; daher auch}\\ \hline \measuredangle\, ABE + DBE &= \tfrac{1}{2}(ACE + DCE)\text{, oder}\\ \measuredangle\, ABD &= \tfrac{1}{2} ACD.\end{aligned}$$

III. Ist der Mittelpunkt (Fig. 122.) außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels, und man zieht den Diameter BE, so ist

$$\begin{aligned}\measuredangle\, ABE &= \tfrac{1}{2} ACE\text{, und}\\ \measuredangle\, DBE &= \tfrac{1}{2} DCE\text{; somit auch}\\ \hline \measuredangle\, ABE - DBE &= \tfrac{1}{2}(ACE - DCE)\text{, d. i.}\\ \measuredangle\, ABD &= \tfrac{1}{2} ACD.\end{aligned}$$

Zus. 1. Das Maß eines Peripheriewinkels ist also der halbe Bogen, auf dem seine Schenkel ruhen (§. 60, Zus.), d. h. es ist im Gradmaße $\measuredangle ABD = \frac{1}{2}$ arc AD.

Zus. 2. Alle Peripheriewinkel eines Kreises, die auf demselben oder gleichen Bogen ruhen, sind einander gleich; denn jeder ist die Hälfte desselben oder gleichen Centriwinkels.

Zus. 3. Jeder Winkel im Halbkreise ist ein Rechter; denn sein Centriwinkel ist ein Gerader (vergl. §. 137, Zus. 2.).

Zus. 4. Zu gleichen Peripheriewinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen (Lehrs. und §. 219.).

Anm. Nach Zus. 3. läßt sich auch ein sogenannter Winkelhacken prüfen. Legt man seine Ecke in einen Punkt der Peripherie und die Kante des einen Schenkels an den einen Endpunkt eines Diameters, so muß die Kante des andern Schenkels genau durch den andern Endpunkt des Durchmessers gehen.

§. 221.

Lehrs. Sind I. zwei Sehnen eines Kreises parallel, so sind die zwischen ihnen liegenden Bogen gleich; und umgekehrt II. sind die Bogen zwischen zwei Sehnen gleich, so sind diese parallel.

I. Dat. AB ╫ CD. — Thes. arc AC = BD (Fig. 123.).

Bew. Zieht man die Sehne BC, so ist $\measuredangle$ ABC = BCD (§. 45, II.); daher auch arc AC = arc BD (§. 220, Zus. 4.).

II. Dat. arc AC = BD. — Thes. AB ╫ CD.

Bew. Wird die Sehne BC gezogen, so ist $\measuredangle$ ABC = BCD (§. 220, Zus. 2.), und daher AB ╫ CD (§. 43, II.).

Zuſ. Iſt eine Sehne zu einer Tangente parallel, ſo ſind die Bogen zwiſchen den Endpunkten der erſtern und dem Berührungspunkte der letztern gleich, und umgekehrt. Denn der Radius an den Berührungspunkt der Tangente ſteht auf dieſer, daher auch auf der Sehne ſenkrecht (§. 45, Zuſ. 1.); halbirt ſomit den zu der letztern gehörigen Bogen (§. 206, II.).

§. 222.

Lehrſ. Ein Sehnenwinkel iſt der Summe zweier Peripheriewinkel gleich, welche auf ſeinem Bogen und dem ſeines Vertikalwinkels ruhen.

Thes. $\measuredangle$ AEC = ABC + BCD (Fig. 124.).

Bew. Zieht man die Sehne BC, ſo iſt (nach §. 78.):

$$\measuredangle AEC = EBC + BCE,$$
$$= ABC + BCD.$$

Zuſ. Jeder Sehnenwinkel iſt einem Peripheriewinkel gleich, der auf einem Bogen ruht, welcher der Summe aus ſeinem und dem Bogen ſeines Vertikalwinkels gleich iſt. Denn macht man arc CF = BD, und zieht BF, ſo iſt BF ǂ CD (§. 221, II.); mithin $\measuredangle$ ABF = AEC.

§. 223.

Lehrſ. Jeder Abſchnittswinkel iſt einem Peripheriewinkel gleich, welcher auf dem zwiſchen ſeinen Schenkeln liegenden Bogen ruht.

Thes. $\measuredangle$ ABC = AEB (Fig. 125.).

Bew. Zieht man den Durchmeſſer BE und die Sehne AE, ſo iſt $\measuredangle$ BAE = R (§. 220, Zuſ. 3.), alſo auch

$\measuredangle$ AEB + ABE = R (§. 77, Zuſ. 3.), ebenſo
$\measuredangle$ ABE + ABC = R (§. 209, Zuſ. 1.), daher
$\measuredangle$ ABE + ABC = AEB + ABE; mithin
$\measuredangle$ ABC = AEB.

Anm. Man beweiſe den Satz für einen ſtumpfen Abſchnittswinkel!

§. 224.

Lehrſ. Jeder Außenwinkel iſt gleich der Differenz zweier Peripheriewinkel, welche auf den zwiſchen ſeinen Schenkeln abgeſchnittenen Bogen ſtehen.

Bew. Wir unterſcheiden (nach §. 218, 3.) drei Fälle:

I. Ist der Außenwinkel ABC (Fig. 126.) durch zwei Secanten gebildet, so ist, wenn man AE zieht,

$\measuredangle$ ABC = AEC — BAE (§. 78, Zus. 2.),
= AEC — DAE.

II. Sind die Schenkel des $\measuredangle$ ABD (Fig. 127.) eine Secante und eine Tangente, so ist, wenn man AD und AE zieht:

$\measuredangle$ ABD = AED — BAE (§. 78, Zus. 2.)
= AED — ADE (§. 223.).

III. Wird der Außenwinkel ABC (Fig. 127.) von zwei Tangenten eingeschlossen, so ist, wenn man eine beliebige Secante BD, dann AE, AD, CD und CE zieht,

$\measuredangle$ ABD = AED — ADE, ebenso
$\measuredangle$ CBD = CED — CDE (II.); also auch
$\measuredangle$ ABD + CBD = AED + CED — (ADE + CDE), d. i.
$\measuredangle$ ABC = AEC — ADC.

Zus. Jeder Außenwinkel ist einem Peripheriewinkel gleich, der auf einem Bogen ruht, welcher der Differenz der Bogen zwischen den Schenkeln des Außenwinkels gleich ist. Denn macht man (Fig. 126.) arc AF = DE, also arc CF = AFC — DE, und zieht EF, so ist EF ‖ AB (§. 221, II.), und daher $\measuredangle$ ABC = FEC.

§. 225.

Lehrs. Schneiden sich zwei Sehnen im Kreise; so sind ihre Segmente umgekehrt proportionirt, d. h. die Stücke der einen bilden die äußern, die der andern die innern Glieder einer Proportion.

Thes. AE ÷ DE = CE ÷ BE (Fig. 128.).

Bew. Man ziehe AD und BC, so ist $\measuredangle$ BAD = BCD, und $\measuredangle$ ADC = ABC (§. 220, Zus. 2.), daher $\triangle$ AED $\sim$ BEC (III.); mithin AE ÷ DE = CE ÷ BE.

Zus. 1. Die Rechtecke, welche mit den Segmenten zweier im Kreise sich schneidender Sehnen construirt werden, sind einander gleich. Denn aus der Proportion des Lehrs. folgt AE . BE = DE . CE.

Zus. 2. Jedes Loth aus irgend einem Punkte der Peripherie auf einen Diameter ist die mittlere Proportionale zwischen den Segmenten des Diameters. Denn sie ist eine halbe Sehne (§. 206.), somit in der Proportion des Lehrsatzes die innern Glieder gleich. (Vergl. §. 158, Zus. I.).

§. 226.

Lehrs. Zwei Secanten, welche einen Außenwinkel einschließen, sind ihren außerhalb des Kreises liegenden Stücken umgekehrt proportional.

Thes. $AB \div BC = BE \div BD$ (Fig. 129.).

Bew. Man ziehe AE und CD, so ist $\triangle ABE \sim BCD$ (III.); mithin $AB \div BC = BE \div BD$.

§. 227.

Lehrs. Schneiden sich eine Tangente und eine Secante; so ist erstere die mittlere (geometrische) Proportionale zwischen der ganzen Secante und ihrem außerhalb des Kreises liegenden Stücke.

Thes. $BD \div AB \div BE$ (Fig. 127.).

Bew. Zieht man die Sehnen AD und AE, so ist $\measuredangle ABD = ABE$, und $\measuredangle ADB = BAE$ (§. 223.), also $\triangle ABD \sim ABE$; mithin $BD \div AB = AB \div BE$, oder $BD \div AB \div BE$.

Zus. Schneiden sich zwei Tangenten, so sind die zwischen ihren Berührungs- und dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte liegenden Stücke derselben einander gleich. Denn es ist

1) $BD \div AB \div BE$, ebenso 2) $BD \div BC \div BE$;

folglich $\overline{AB}^2 = BD \,.\, BE = \overline{BC}^2$; also auch $AB = BC$.

§. 228.

Lehrs. In jedem Kreise verhalten sich die Bogen wie die ihnen zugehörigen Centriwinkel.

Thes. $\text{arc}\, AE \div \text{arc}\, DE = \measuredangle ACE \div \measuredangle DCE$ (Fig. 112.).

Bew. Da die Centriwinkel von ihren Bogen gemessen werden, so hat man (nach §. 60.):

$\text{arc}\, AE = \measuredangle ACE$, ebenso $\text{arc}\, DE = \measuredangle DCE$; mithin

$$\text{arc}\, AE \div \text{arc}\, DE = \measuredangle ACE \div \measuredangle DCE.$$

Zus. 1. Jeder Bogen eines Kreises verhält sich zur ganzen Peripherie, wie sein Centriwinkel zu 4 R oder 360°.

Zus. 2. Peripheriewinkel verhalten sich wie ihre Bogen.

Zus. 3. Die Bogen ungleicher Kreise zwischen gleichen Centriwinkeln haben zu den Peripherien ihrer Kreise gleiches Verhältniß.

Denn sind B und b Bogen zweier Kreise, deren Peripherien P und p sind, und der zu jenen Bogen gehörige Centriwinkel w, so ist

$$B \div P = w \div 4R \text{ (Zus. 1.), ebenso}$$
$$b \div p = w \div 4R\text{; daher}$$
$$B \div P = b \div p.$$

Anm. Bogen ungleicher Kreise zwischen gleichen Centriwinkeln nennt man ähnliche Bogen. Dieselben sind in Bezug auf Gradmaß einander gleich, da $P = p = 360^{\circ}$ ist (§. 56.).

b) Praktische Sätze.

§. 229.

Aufg. Eine gerade Linie zu ziehen, welche zwei gegebene Kreise zugleich auf einerlei Seite der Centrale berührt.

Aufl. Man beschreibe (Fig. 130.) über der Centrale CM einen Halbkreis, trage in diesen aus dem Mittelpunkte des größern Kreises die Sehne $CD = AC - BM$ ein, verlängere sie bis E, und ziehe dann MF ‖ CE; so hat EF die verlangte Eigenschaft.

Bew. Zieht man DM, so ist ∡ CDM = R (§. 220, Zus. 3.), also auch EDM = R (§. 32, Zus. 1.). Ferner ist DE # FM, folglich das Viereck EM ein Rechteck, und daher EF ⊥ CE und MF; mithin eine Tangente beider Kreise (§. 209.).

Anm. Welche Aenderung erlitte die Construction, wenn die gegebenen Kreise gleich wären; welche, wenn sie sich berührten oder schnitten?

§. 230.

Aufg. Eine Tangente an zwei gegebene Kreise zu legen, so daß ihre Berührungspunkte auf verschiedenen Seiten der Centrallinie liegen.

Aufl. Man beschreibe (Fig. 131.) über der Centrale CM einen Halbkreis, trage in diesen aus einem der beiden Mittelpunkte eine Sehne $CD = AC + BM$, ziehe durch den andern Mittelpunkt ME ‖ CD; so leistet die Gerade EF der Aufgabe Genüge.

Bew. Es ist, wenn man DM zieht, DF # ME, ferner ∡ CDM = R; also DE ein Rechteck, und EF eine Tangente beider Kreise.

§. 231.

Aufg. Man soll I. über einer Geraden einen Kreisbogen beschreiben, II. von einem Kreise einen Abschnitt trennen, der in beiden Fällen einen gegebenen Winkel faßt.

Aufl. u. Bew. I. Man lege den gegebenen Winkel (Fig. 132.) an den einen Endpunkt B der gegebenen Linie AB, errichte in B eine Senkrechte auf BC, und im Halbirungspunkte D von AB ein Loth auf AB; so ist der Durchschnittspunkt M der beiden Senkrechten der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch A und B geht, und von dem somit arc AB der gesuchte Bogen ist. Denn da $\measuredangle$ CBM = R, so ist $\measuredangle$ DBM < R, also werden sich die in B und D errichteten Lothe schneiden (§. 44.). Ferner hat M von A und B gleiche Entfernung (§. 97, Zus. 3.); also geht ein aus M mit MB beschriebener Kreis auch durch A, und AB ist eine Sehne, dann BC eine Tangente desselben; mithin jeder auf dem Bogen AB dieses Kreises ruhende Peripheriewinkel dem gegebenen gleich (§. 223.).

II. Man ziehe (Fig. 125.) durch einen beliebigen Punkt B der Peripherie eine Tangente CD, construire an diese in B den gegebenen Winkel ABC; so ist jeder Winkel auf dem Bogen AB dem gegebenen gleich (§. 223.).

§. 232.

Aufg. Aus der Basis (s) und Höhe (h) eines Segmentes den Radius (r) des Kreises zu bestimmen.

Aufl. $r = (\frac{1}{4}s^2 + h^2):2h$.

Bew. Verlängert man die Höhe des Segmentes, so wird sie ein Diameter (§. 206, Zus. 2.), der in die Abschnitte h und 2r—h getheilt ist. Ferner hat man

$$(2r - h) \div \tfrac{1}{2}s \div h \text{ (§. 225, Zus. 2.); also}$$

$$(2r - h)h = \tfrac{1}{4}s^2, \text{ woraus } r = (\tfrac{1}{4}s^2 + h^2):2h \text{ folgt.}$$

Zus. Aus $(2r - h)h = \frac{1}{4}s^2$ ergibt sich umgekehrt:

$$\text{I. } s = 2\sqrt{h(2r-h)}; \text{ und II. } h = r \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2}.$$

§. 233.

Aufg. Aus den gegebenen Sehnen (a und b) zweier Bogen und dem Radius (r) eines Kreises die Sehne (s) zu finden, welche zur Summe beider Bogen gehört.

Aufl. $s = \frac{1}{2r}\left(a\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - a^2}\right)$.

Bew. Es sei (Fig. 133.) $AB = a$, und $BD = b$; also $AD = s$. Man ziehe den Diameter BE, dann AE und $BF \perp AD$; so ist

$$\measuredangle BFD = BAE = R \text{ (§. 220, Zus. 3.)},$$
$$\measuredangle BDF = BEA \text{ (§. 220, Zus. 2.); also}$$
$$\triangle BDF \sim AEB, \text{ und daher}$$
$$BF \div BD = BA \div BE, \text{ oder}$$
$$BF \div b = a \div 2r; \text{ mithin}$$
$$BF = \frac{ab}{2r}. \text{ — Ferner ist im } \triangle BAF:$$

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BF}^2 = a^2 - \frac{a^2b^2}{4r^2} = \frac{a^2(4r^2 - b^2)}{4r^2}; \text{ also}$$

$$1)\ AF = \frac{a}{2r}\sqrt{4r^2 - b^2}. \text{ — Ebenso ergibt sich im } \triangle BFD:$$

$$2)\ DF = \frac{b}{2r}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Addirt man 1) und 2); so erhält man für $AF + DF = AD = s$, den oben angegebenen Ausdruck.

Zus. 1. Wird die Sehne $AB = BD$, oder $a = b$, so findet sich für die Sehne des doppelten Bogens:

$$s = \frac{b}{r}\sqrt{4r^2 - b^2} = \frac{b}{r}\sqrt{(2r + b)(2r - b)}.$$

Zus. 2. Löst man die Gleichung des Zus. 1. für b auf, so findet man aus der Sehne s eines Bogens für die Sehne des halben Bogens:

$$b = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - s^2}\right)}.$$

§. 234.

Aufg. Aus den Sehnen (a und b) zweier Bogen und dem Radius (r) eines Kreises die Sehne (c) zu finden, welche zur Differenz beider Bogen gehört.

Aufl. $c = \frac{1}{2r}\left(a\sqrt{4r^2 - b^2} - b\sqrt{4r^2 - a^2}\right)$.

Bew. Es sei $AB = a$, $AD = b$ und $BD = c$ (Fig. 134.). Man ziehe die Radien AC, BC und DC, ferner aus A eine

Senkrechte, welche die verlängerte BD in E trifft, dann $CF \perp AD$ und $CG \perp AB$, so ist $\measuredangle m = \frac{1}{2} ACD = ACF$ (§. 220 und 219, Zus. 3.); mithin $\triangle ABE \sim ACF$ (III.), und daher

$$BE \div AB = CF \div AC, \text{ oder}$$
$$BE \div a \quad = CF \div r; \text{ also}$$

$$1)\ BE = \frac{a}{r}.CF = \frac{a}{2r}.\sqrt{4r^2 - b^2} \text{ (§. 216.)}.$$

Ferner ist (nach §. 78.) $\measuredangle ADE = m + n = \frac{1}{2}(ACD + BCD) = \frac{1}{2} ACB = ACG$; also $\triangle AED \sim AGC$ (III.), und daher

$$DE \div AD = CG \div AC, \text{ oder}$$
$$DE \div b \quad = CG \div r; \text{ mithin}$$

$$2)\ DE = \frac{b}{r}.CG = \frac{b}{2r}.\sqrt{4r^2 - a^2} \text{ (§. 216.)}.$$

Subtrahirt man 2) von 1); so folgt obiger Werth von $BE - DE = BD = c$.

Anm. Man leite die Formel dieses §. aus der Gleichung §. 233. ab, indem man dieselbe für b auflöst.

III. Kap. Der Kreis in Verbindung mit geradlinigen Figuren.

§. 235.

Erkl. 1. Eine geradlinige Figur heißt eine Figur im Kreise, wenn alle ihre Seiten Sehnen, also alle ihre Ecken Peripheriewinkel des Kreises sind; man sagt in diesem Falle auch, die Figur sei dem Kreise ein-, oder letzterer der Figur umgeschrieben.

2. Eine Figur, deren sämmtliche Seiten Tangenten eines Kreises sind, heißt eine Figur um den Kreis, oder dem Kreise umschrieben, während letzterer der Figur eingeschrieben genannt wird.

a) Theoretische Sätze.

§. 236.

Lehrs. Jedes Paar gegenüberstehender Winkel eines Viereckes im Kreise beträgt zusammen 2R.

Thes. $\measuredangle BAD + BCD = 2R$ (Fig. 135.).

Bew. Zieht man die Diagonalen AC und BD, so ist $\measuredangle\ m = n$ und $\measuredangle\ x = y$ (§. 220, Zus. 2.); daher auch $\measuredangle\ m + x = n + y = BCD$. — Ferner ist

$$\measuredangle\ BAD + m + x = 2R \text{ (§. 77.), also}$$

$$\measuredangle\ BAD + BCD = 2R = ABC + ADC \text{ (§. 81.).}$$

Zus. Sind umgekehrt die gegenüberliegenden Winkel eines Viereckes zusammen = 2R; so läßt sich um dasselbe ein Kreis beschreiben (§. 202, Zus. 1; dann indirekt nach §. 79.).

§. 237.

Lehrs. Theilt man die Peripherie eines Kreises in lauter (wenigstens drei) gleiche Theile, und verbindet die aufeinander folgenden Theilungspunkte durch Sehnen; so erhält man ein reguläres dem Kreise eingeschriebenes Vieleck. *)

Dat. arc. AB = BD = DE . . . . . (Fig. 136.).

Thes. { I. chord. AB = BD = DE . . . .
II. $\measuredangle$ ABD = BDE = DEF . . . .

Bew. Da alle Bogen einander gleich sind, so sind es auch ihre Sehnen (§. 219, Zus. 1.) d. i. die Seiten der Figur. Ebenso ergibt sich die Gleichheit der Winkel. Denn es ist

arc AFD = (n — 2) arc AB, ebenso
arc EGB = (n — 2) arc AB u. s. f.; also auch
arc AFD = arc EGB u. s. w.; und daher
$\measuredangle$ ABD = BDE . . . . (§. 220, Zus. 2.).

§. 238.

Lehrs. Theilt man die Peripherie eines Kreises in lauter gleiche Theile, und legt durch alle Theilungspunkte Tangenten; so erhält man ein reguläres demselben umschriebenes Polygon.

Dat. arc AB = BD = DE . . . . (Fig. 136.).

Thes. I. $\measuredangle$ K = L = M . . . ; II. KL = LM = MN . . . .

Bew. Zieht man nach allen Theilungspunkten Radien, so stehen die Tangenten darauf senkrecht, schneiden sich also paarweise (§. 47.).

*) Ein Verfahren, die Peripherie eines Kreises in eine gegebene Anzahl gleicher Theile, wenigstens mit einer für die Praxis hinreichenden Annäherung, zu theilen, ist später (§. 433.) angegeben.

Werden ferner die Sehnen AB, BD, DE u. s. f. gezogen, so sind diese alle gleich; ebenso ist $\measuredangle$ KAB = KBA = LBD = LDB = MDE = MED.... (§. 223 und 220, Zus. 2); daher die Dreiecke AKB, BLD, DME.... congruent und gleichschenklig; mithin $\measuredangle$ K = L = M...., dann

AK = BK = BL = DL = DM u. s. w., folglich auch
BK + BL = DL + DM...., d. i. KL = LM....

Das Vieleck ist somit gleichwinklig und gleichseitig, also regulär; ferner dem Kreise umgeschrieben (§. 235, 2.).

§. 239.

Lehrs. Werden in einem regulären Vielecke zwei anliegende Winkel durch Gerade (oder zwei anstoßende Seiten durch Perpendikel) halbirt; so schneiden sich diese in einem Punkte, der I. von allen Ecken und II. von allen Seiten gleichweit entfernt ist.

Dat. $\measuredangle m = \frac{1}{2}BAG$, und $\measuredangle n = \frac{1}{2}ABD$ (Fig. 137.).

Thes. { I. AC = BC = CD .....;
II. CK = CL = CM .....

Bew. I. Da $\measuredangle BAG < 2R$ (§. 85, Zus. 2.), folglich $\measuredangle m < R$, und ebenso $\measuredangle n < R$, also $\measuredangle m + n < 2R$; so müssen die Halbirungslinien sich schneiden (§. 44.).

Weil ferner $\measuredangle BAG = ABD$, so ist auch $\measuredangle m = n$; daher AC = BC (§. 92, II.). Zieht man CD, so ist $\triangle BCD \cong ABC$ (I.); mithin CD = AC = BC.

Ferner ist, wegen CD = BC, auch $\measuredangle q = p = \frac{1}{2}ABD$; weil aber $\frac{1}{2}ABD = \frac{1}{2}BDE$, so ist $\measuredangle q = \frac{1}{2}BDE = r$; also $\triangle DCE \cong BCD$ (I.), und daher CE = CB = CD = AC, u. s. w.

II. Fällt man aus C auf alle Seiten der Figur Perpendikel, so hat man $\measuredangle n = p$, und BC = BC, daher $\triangle BCK \cong BCL$ (§. 95, Zus. 1.); mithin CK = CL. Ebenso ergibt sich, daß auch CM = CN... = CK, also alle Seiten der Figur gleichweit von C entfernt sind.

Man nennt aus dem im Lehrs. ausgesprochenen Grunde den Punkt C den Polygonsmittelpunkt; die Abstände der Seite vom Polygonsmittelpunkte werden auch Apotheme genannt.

Zus. 1. Jedem regulären Polygone läßt sich also ein Kreis sowohl um-, als auch einschreiben, und beide sind concentrisch.

Zus. 2. Die geraden Linien aus dem Polygonsmittelpunkte nach den Ecken einer regulären Figur theilen diese in so viele congruente gleichschenklige Dreiecke (Mittelpunkts-Dreiecke genannt), als sie Seiten hat, und halbiren die Polygonswinkel.

Zus. 3. Alle Centriwinkel eines regulären Vieleckes sind einander gleich; hat daher das Vieleck n Seiten, so ist, da ihre Summe 4R beträgt (§. 32, Zus. 5.), jeder derselben $= 4R : n$.

Zus. 4. Die Geraden vom Polygonsmittelpunkte einer regulären Figur an die Halbirungspunkte der Seiten stehen auf diesen senkrecht (Zus. 2. und §. 97, II.).

Zus. 5. Jedes reguläre Polygon ist einem Dreiecke gleich, welches als Basis den Perimeter der Polygons, und als Höhe die Senkrechte vom Polygonsmittelpunkte auf eine Seite (ein Apothem) hat (§. 115, Zus. 3.).

§. 240.

Lehrs. Ist eine Sehne die mittlere Proportionale zwischen dem Diameter und Radius eines Kreises; so ist der zugehörige Bogen ein Quadrant, die Sehne selbst also die Seite des Quadrates (Tetragons) im Kreise.

Dat. $AD \div AB \div AC$ (Fig. 138.).

Thes. arc. $AB = \frac{1}{4} P = 90^0$.

Bew. Zieht man den Radius BC, so ist $BC \perp AD$. Denn wäre nicht BC, sondern etwa $BK \perp AD$, so hätte man

$AD \div AB \div AK$ (§. 158, Zus. II.). Nun ist aber

$AD \div AB \div AC$ (Dat.); also wäre $AK = AC$,

was ungereimt ist. Es ist daher $\measuredangle ACB = R$; mithin

arc $AB = \frac{1}{4}P = 90^0$ (§. 59.).

Wie läßt sich am einfachsten einem Kreise ein Quadrat einschreiben? (§. 59.).

Zus. Setzt man die Seite des Quadrates, nämlich $AB = a$ und $AC = r$, also $AD = 2r$; so ist $a = r\sqrt{2}$. Denn es ist $2r \div a \div r$ (oder auch $a^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$).

Umgekehrt folgt aus der Gleichung $a = r\sqrt{2}$ für den Radius des Kreises um ein Quadrat $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

§. 241.

Lehrs. Ein Bogen, dessen Sehne dem Radius gleich ist, ist der sechste Theil der Peripherie (P), die Sehne selbst also die Seite des regulären Sechseckes (Hexagons) im Kreise.

Dat. chorda GF = CG (Fig. 137.).

Thes. arc. GF $= \frac{1}{6}P = 60^0$.

Bew. Zieht man noch den Radius CF, so ist das $\triangle$ CGF gleichseitig, also $\measuredangle$ GCF $= \frac{2}{3}R$. Ferner hat man

arc GF $\div$ P $= \measuredangle$ GCF $\div$ 4R (§. 228, Zus. 1.), oder
$= \frac{2}{3}R \div 4R$; d. i.
$= 1 \div 6$; mithin
arc GF $= \frac{1}{6}P = 60^0$.

Man beweise den Lehrsatz umgekehrt!

Zus. Mittelst des Radius läßt sich also einem Kreise ein reguläres Sechseck einschreiben, indem man ihn sechsmal nacheinander als Sehne einträgt.

§. 242.

Lehrs. Macht man das größere Stück des in stetiger Proportion (§. 159.) getheilten Radius eines Kreises zur Sehne; so ist der zugehörige Bogen der zehnte Theil der Peripherie (P), jenes Stück also die Seite des regulären Zehneckes (Dekagons) im Kreise.

Dat. AC $\div$ BC $\div$ AB; und AD = BC (Fig. 139.).

Thes. arc AD $= \frac{1}{10}P = 36^0$.

Bew. Zieht man CD und BD, so ist wegen $\measuredangle$ m = m, dann AC $\div$ BC $\div$ AB, oder AC $\div$ AD $\div$ AB

$\triangle$ ACD $\sim$ ABD (§. 147.); also
$\measuredangle$ x = p, und $\measuredangle$ n = ADC = p + q = m; daher
BD = AD = BC (§. 92, II.), folglich auch
$\measuredangle$ q = x, und daher m = p + q = 2x.

Ferner ist $\measuredangle$ x + (p + q) + m = 2R, d. i.
5x = 2R; also x $= \frac{2}{5}R$. — Endlich hat man
arc AD $\div$ P $= \measuredangle$ x $\div$ 4R (§. 228, Zus. 1.), oder
$= \frac{2}{5}R \div 4R = 1 \div 10$; daher
arc AD $= \frac{1}{10}P = 36^0$.

Zus. Aus der Betrachtung der Dreiecke ACD und BCD ergeben sich folgende zwei Sätze:

I. Ist in einem gleichschenkligen Dreiecke die Basis gleich dem größern Stücke des stetig getheilten Schenkels, so ist der Winkel an der Spitze die Hälfte von einem Winkel an der Basis.

II. Ist in einem gleichschenkligen Dreiecke jeder Schenkel die Mediane (§. 159, Anm.) der Basis, so ist der Winkel an der Spitze dreimal so groß, als ein Winkel an der Basis. Denn in dem $\triangle BCD$ ist $\measuredangle x = q = \frac{2}{5}R$; also

$$\measuredangle CBD = 2R - \tfrac{4}{5}R = \tfrac{6}{5}R = 3 . \tfrac{2}{5}R.$$

§. 243.

Lehrs. Der Umfang eines regulären Vieleckes I. von n Seiten im Kreise ist kleiner, als der des eingeschriebenen von 2n Seiten; dagegen II. von N Seiten um den Kreis größer, als der Umfang des umgeschriebenen von 2N Seiten.

Thes. { I. Perim. n Eck < Perim. 2n Eck.
II. Perim. N Eck > Perim. 2N Eck.

Bew. I. Es ist (Fig. 138.) offenbar $BD < BF + DF$, oder $BD < 2 . BF$, also auch $n . BD < 2n . BF$, d. i.

Perim. n Eck < Perim. 2n Eck (§. 171, Zus. III.).

II. Weil (Fig. 136.) $\measuredangle RTP = R$, so ist $PR > RT$, daher auch $PR + GR > RT + GR$, oder $GP > RT + GR$; nun ist aber $GP = \frac{1}{2}PQ$, ferner $RT = GR$ (§. 227, Zus.) $= ST$, folglich $RT + GR = RT + ST = RS$, daher $\frac{1}{2}PQ > RS$ oder $PQ > 2 . RS$; mithin auch $N . PQ > 2N . RS$, d. i.

Perim. N Eck > Perim. 2N Eck.

Zus. 1. Der Unterschied zwischen dem Umfange (P) eines Kreises und eines demselben eingeschriebenen Vieleckes ist um so kleiner, je mehr das letztere Seiten hat. Denn durch Subtraktion der Ungleichung I. von P folgt:

P — Perim. 2n Eck < P — Perim. n Eck.

Zus. 2. Der Unterschied zwischen den Umfängen eines Kreises und eines demselben umschriebenen Polygons wird gleichfalls um so kleiner, je größer die Seitenzahl des letztern ist. Denn subtrahirt man P von der Ungleichung II., so folgt

Perim. 2N Eck — P < Perim. N Eck — P.

Zus. 3. Es ist somit die Peripherie des Kreises die Grenze, welcher sich die Umfänge der ein= und umgeschriebenen Vielecke

mehr und mehr nähern; man kann ihn deßhalb selbst als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachten.

Zus. 4. Der Kreis ist einem Dreiecke gleich, dessen Basis die Peripherie, und dessen Höhe der Radius ist (§. 239, Zus. 5.).

Zus. 5. Ein Kreissektor ist einem Dreiecke gleich, welches dessen Bogen als Basis und den Radius als Höhe hat.

§. 244.

Lehrs. Die Perimeter (P und p) gleichnamiger regulärer Vielecke verhalten sich wie die Radien (oder Diameter) der ihnen um- oder eingeschriebenen Kreise.

Thes. $P \div p = AC \div ac = CK \div ck$ (Fig. 140.).

Bew. Da $\angle GAB = gab$, also auch $\frac{1}{2} GAB = \frac{1}{2} gab$, d. i. $\angle CAB = cab$, und aus demselben Grunde $\angle CBA = cba$, so ist $\triangle ACB \sim acb$ (III.), und daher

1) $AB \div ab = AC \div ac = CK \div ck$ (§. 151.). Dann ist

2) $P \div p = AB \div ab$ (§. 153.); mithin

$P \div p = AC \div ac = CK \div ck$.

Zus. Die Seiten gleichnamiger regulärer Vielecke verhalten sich wie die Radien der ihnen um- oder eingeschriebenen Kreise.

b) Praktische Sätze.

§. 245.

Aufg. Um ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. u. Bew. Man halbire zwei beliebige Seiten, und errichte in den Halbirungspunkten Lothe auf dieselben, so ist der Durchschnittspunkt derselben der Mittelpunkt des gesuchten Kreises (§. 202.).

Zus. Die Perpendikel, welche in den Halbirungspunkten der Seiten eines Dreieckes errichtet werden, schneiden sich in einem, nämlich dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises (§. 206, Zus. 2.).

§. 246.

Aufg. Einem gegebenen Dreiecke einen Kreis einzuschreiben.

Aufl. Man halbire zwei (beliebige) Winkel A und D (Fig. 141.) durch Gerade; so ist ihr Durchschnittspunkt C der Mittelpunkt, und das auf AD gefällte Loth CE der Radius des verlangten Kreises.

Bew. Die Halbirungslinien schneiden sich (§. 44.). Zieht man noch CF ⊥ BD und CG ⊥ AB, so ist △ CDE ≅ CDF (III.); also CE = CF. Ebenso folgt △ CAG ≅ CAE; daher ist CG = CE = CF. Der aus C mit CE beschriebene Kreis berührt somit die Seiten des Dreieckes (§. 209.).

Zus. Die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkte, nämlich dem Centrum des eingeschriebenen Kreises, und umgekehrt.

§. 247.

Aufg. Einem Kreise ein Dreieck einzuschreiben, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Aufl. Man ziehe (Fig. 142.) durch einen beliebigen Punkt F der Peripherie eine Tangente DE, construire im Berührungspunkte F zur Geraden EF den ∡ α = m, und zu DF den ∡ β = n, und ziehe GH; so ist △ FGH das gesuchte.

Bew. Es ist ∡ x = α = m, ebenso ∡ y = β = n (§. 223.); daher △ FGH ∾ ABC (III.).

§. 248.

Aufg. Einem Kreise ein Dreieck umzuschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Aufl. Man verlängere (Fig. 143.) eine Seite AB des gegebenen △ ABC, wodurch zu ∡ m und n die Nebenwinkel p und q entstehen; ziehe ferner in dem gegebenen Kreise einen beliebigen Radius ME, construire zu demselben die Centriwinkel r = p und s = q; so schließen die Tangenten, welche an den Kreis durch die Punkte E, F und G gelegt werden, das gesuchte △ HKL ein.

Bew. Die Tangenten müssen sich paarweise schneiden (§. 47.). Ferner sind in dem Vierecke MEHF die Winkel bei E und F rechte, daher auch ∡ r + x = 2R = m + p (§. 82.); weil aber r = p, so ist auch ∡ x = m. Ebenso ergibt sich ∡ y = n; folglich ist △ HKL ∾ ABC (III.).

§. 249.

Aufg. Aus der Seite eines regulären Vieleckes im Kreise und dem Radius des letztern die Seite desjenigen regulären Polygons abzuleiten und zu berechnen, welches I. doppelt so viele, II. nur halbsoviele Seiten hat.

Aufl. Ist a die Seite des gegebenen Polygons, r der Radius, dann b_{2n} und s_n beziehungsweise die Seiten der Vielecke von der doppelten und halben Seitenzahl; so erhält man:

$$\text{I. } b_{2n} = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - a^2})}. \quad - \quad \text{II. } s_n = \frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Bew. I. Zieht man (Fig. 138.) den Radius CF ⊥ BD, so wird arc BF = arc DF (§. 206, II.), daher auch die Sehne BF = DF; somit BF die Seite des Polygons von der doppelten Seitenzahl.

Da ferner BF die Sehne des halben Bogens BFD ist, so folgt die Richtigkeit der Formel I. aus §. 233, Zus. 2., wenn man daselbst a statt s setzt.

Diese Formel ergibt sich auch unabhängig auf folgende Art: Es ist in dem rechtwinkligen △ BGF:

$$\overline{BF}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{FG}^2, \text{ oder } \quad a)\ b^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \overline{FG}^2.$$

Nun ist aber $FG = CF - CG = r - \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$ (§. 216.); also

$$\overline{FG}^2 = r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2} + r^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$

$$= 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2} - \tfrac{1}{4}a^2.$$

Durch Substitution dieses Werthes von $\overline{FG}^2$ in die Gleichung a) folgt nun leicht der Werth von b.

II. Verdoppelt man den zur Seite (BF = a) des gegebenen Polygons gehörigen Bogen, und zieht die zugehörige Sehne (BD = s); so ist diese die Seite des Vieleckes von der halben Seitenanzahl.

Die Richtigkeit der Formel II. folgt aus §. 233, Zus. 1., da BD = s die Sehne des doppelten Bogens ist.

Zus. Nach obigen Formeln lassen sich nun die Seiten aller regulären Polygone, die aus eine mandern abgeleitet sind, bloß durch den Radius des umschriebenen Kreises bestimmen, wenn die Seite des letztern durch diesen bestimmt ist; dann umgekehrt der Radius durch die Seite.

Setzt man z. B. a = r, d. h. ist a die Seite des Hexagons im Kreise (§. 241.), so ergibt sich

I. für die Seite des regulären Dreieckes im Kreise aus der Formel II. ($s_n = a_3$ gesetzt):

$$a)\ a_3 = r\sqrt{3}, \text{ und umgekehrt } \quad b)\ r = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}.$$

II. für die Seite des Dodekagons (regul. Zwölfeckes) im Kreise aus Formel I. ($b_{2n} = a_{12}$ gesetzt):

a) $a_{12} = \sqrt{r(2r - \sqrt{3r^2})} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, und hieraus

b) $r \;\; = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Setzt man $a = r\sqrt{2}$, ist also a die Seite des Quadrates im Kreise (§. 240, Zus.), so wird ($b_{2n} = a_8$ gesetzt):

III. die Seite des regulären Achteckes (aus I.):

a) $a_8 = \sqrt{r(2r - \sqrt{2r^2})} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, woraus

b) $r \;\; = \frac{1}{2}a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = a\sqrt{1 + 0{\cdot}5\sqrt{2}}$ folgt 2c.

$16r\ldots r\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ $a_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

§. 250.

Aufg. Aus dem Radius (r) eines Kreises und der Seite (a) eines regulären, demselben eingeschriebenen Vieleckes die Seite (c) des gleichnamigen umschriebenen regulären Polygons zu berechnen, und umgekehrt.

Aufl. $\text{I. } c = \frac{2r.a}{\sqrt{4r^2 - a^2}} = \frac{2r.a\sqrt{4r^2 - a^2}}{4r^2 - a^2};$

$$\text{II. } a = \frac{2r.c}{\sqrt{4r^2 + c^2}} = \frac{2r.c\sqrt{4r^2 + c^2}}{4r^2 + c^2}.$$

Bew. I. Es sei (Fig. 136.) $BD = a$, $LM = c$ und $CD = r$. Da die Polygone ähnlich sind, so ist, wenn man CL zieht, CV der Radius des Kreises, welcher dem Vielecke, das BD zur Seite hat, eingeschrieben werden kann; daher

$LM \div BD = CD \div CV$ (§. 244, Zus. 1.); oder

$c \div a \;\; = r \div \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$ (§. 216.), woraus die Gleichung I. folgt.

II. Die Formel II. erhält man, wenn man I. für a auflöst.

Zus. Kennt man die Seite eines regul. Polygons im Kreise durch den Radius ausgedrückt, so kann man also auch mittelst der Formel I. die Seite des gleichnamigen umschriebenen durch den Radius des Kreises bestimmen, und umgekehrt diesen aus jener.

Man findet z. B., wenn der Radius r ist:

I. für die Seite eines regulären Dreieckes um einen Kreis, da die Seite des eingeschriebenen, d. i. $a_3 = r\sqrt{3}$ ist:

a) $c_3 = 2r\sqrt{3}$, d. h. — ? b) $r = {}^1/_6 c\sqrt{3}$;

II. für das Hexagon, da $a = r$, wird:

a) $c_6 = {}^2/_3 r\sqrt{3}$, d. h. — ? b) $r = {}^1/_2 c\sqrt{3}$;

III. für das Dodekagon, da $a = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, ergibt sich:

a) $c_{12} = 2r(2 - \sqrt{3})$; b) $r = {}^1/_2 c(2 + \sqrt{3})$;

IV. für das Quadrat, weil $a = r\sqrt{2}$ ist, folgt:

a) $c_4 = 2r$, d. h. — ? b) $r = {}^1/_2 c$;

V. für das regul. Achteck, da $a = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, erhält man:

$c_8 = 2r(2 - \sqrt{2})$; b) $r = {}^1/_4 c(2 + \sqrt{2})\sqrt{2}$.

$2r(\sqrt{2} - 1) = r\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})$.

§. 251.

Aufg. Aus dem Radius (r) eines Kreises I. die Seite des eingeschriebenen, II. die des umschriebenen Dekagons (regul. Zehneckes), und umgekehrt, zu bestimmen.

Aufl. Bezeichnet a_{10} die Seite des eingeschriebenen, c_{10} die des umschriebenen Dekagons, so ergibt sich

I. a) $a_{10} = \frac{1}{2} r(\sqrt{5} - 1)$, und b) $r = \frac{1}{2} a(\sqrt{5} + 1)$;

II. a) $c_{10} = 2r\sqrt{1 - 0{\cdot}4\sqrt{5}}$, „ b) $r = \frac{1}{2} c\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

Bew. I. Nach §. 242. hat man die Proportion

$$r \div a \div (r - a),$$ aus welcher

$$a^2 = r^2 - ar$$ folgt.

Je nachdem man diese Gleichung für a oder r auflöst, erhält man obige Resultate.

II. Es ist $c_{10} = 2r . a_{10} : \sqrt{4r^2 - a^2}$ (§. 250, I.); daher wird durch Substitution von $a_{10} = \frac{1}{2} r(\sqrt{5} - 1)$:

$$c_{10} = \frac{2r \cdot \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{4r^2 - \frac{1}{4}r^2(6-2\sqrt{5})}} = \frac{r^2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{\frac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$= 2r\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = 2r\sqrt{1-0{\cdot}4\sqrt{5}}.$$

Hieraus folgt umgekehrt der oben II. für r angegebene Werth.

Zus. 1. Nunmehr läßt sich auch aus dem Radius I. die Seite des eingeschriebenen Pentagons (regul. Fünfeckes) mittelst §. 249, II. bestimmen, wenn man daselbst $a = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$ setzt. Man findet auf ähnlichem Wege, wie oben II.:

a) $a_5 = \frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; daraus b) $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2+0{\cdot}4\sqrt{5}}$.

II. Für die Seite des umschriebenen Pentagons erhält man mittelst §. 250, I. und des Werthes von a_5:

a) $c_5 = 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$; hieraus b) $r = \frac{1}{2}c\sqrt{1+0{\cdot}4\sqrt{5}}$.

Zus. 2. Das Quadrat der Seite des Pentagons im Kreise ist gleich der Summe der Quadrate des Radius und der Zehnecksseite. Denn aus Zus. 1, I. folgt:

$$a_5{}^2 = \tfrac{1}{4}r^2(10-2\sqrt{5}) = \tfrac{1}{4}r^2(4+6-2\sqrt{5})$$

$$= r^2 + \tfrac{1}{4}r^2(6-2\sqrt{5}) = r^2 + \tfrac{1}{4}r^2(\sqrt{5}-1)^2.$$

Anm. 1. Nach diesem Satze lassen sich nun die Seiten aller ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke durch den Radius (und umgekehrt) bestimmen, die aus dem Dekagon abgeleitet werden können.

Anm. 2. Mittelst §. 234. und den bisher behandelten Sätzen kann man die Seiten mancher anderer regul. Polygone durch den Radius des umschriebenen Kreises rc. ausdrücken. Es ist z. B. (die Peripherie durch p bezeichnet): $\frac{1}{6}p - \frac{1}{10}p = \frac{1}{15}p$; also die Sehne, welche zur Differenz der Bogen der Hexagons- und Dekagonsseite gehört, die Seite des regul. Fünfzehneckes. Setzt man daher $a = r$ und $b = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$, so findet man

$$a_{15} = \tfrac{1}{4}r\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right).$$

§. 252.

Aufg. Das Verhältniß des Diameters (d) zur Peripherie (p) eines Kreises annäherungsweise in Zahlen zu bestimmen.

Aufl. $d \div p = 1 \div 3{\cdot}141592 \ldots\ldots$

Bew. Berechnet man die Seiten, und aus ihnen die Perimeter zweier gleichnamiger Polygone mit sehr vielen Seiten, von welchen das eine ein-, das andere umgeschrieben ist; so kann man die Peripherie des Kreises, welche zwischen jenen Perimetern liegt, (§. 243, Zus. 3.), dem Umfange des einen oder andern Polygons jedenfalls soweit gleich setzen, als jene Umfänge selbst übereinstimmen. Nun findet man aber von der Hexagonsseite ausgehend, und $r = 1$ gesetzt, daß der Umfang (u) des eingeschriebenen, und der (U) des umschriebenen regul. 12288-Eckes noch in der sechsten Dezimalstelle übereinstimmen; denn man erhält

$u = 12288 . 0{\cdot}000511326924 = 6{\cdot}283185242112 \ldots$, und

$U = 12288 . 0{\cdot}000511326930 = 6{\cdot}283185315840 \ldots$;

daher müssen die ersten 7 Ziffern auch der Peripherie des Kreises angehören; es ist somit $p = 6{\cdot}283185 \ldots$

Für $r = 1$ ist ferner $d = 2$; daher wird

$$d \div p = 2 \div 6{\cdot}283185 \ldots = 1 \div 3{\cdot}141592 \ldots$$

Anm. 1. Man bezeichnet diese irrationale Verhältnißzahl des Diameters zur Peripherie allgemein durch π, und nimmt davon in der Anwendung so viele Decimalstellen, als die Genauigkeit des zu erzielenden Resultates verlangt. In den meisten Fällen genügt es, $\pi = 3{\cdot}1416$ zu setzen, sehr häufig wird sogar nur $\pi = 3{\cdot}14$ genommen.

Anm. 2. Die Zahl π wird ihrem Berechner, Ludolph van Ceulen oder Collin *), zu Ehren gewöhnlich die ludolphische Zahl oder die Ludolphine genannt. Er fand auf dem oben angegebenen Wege:

$$\pi = 3{\cdot}14159265358979323846264338327950 \ldots$$

Schon Archimedes (287 — 212 v. Chr.) fand mittelst der Vieleckumfänge das nach ihm sogenannte archimedische Verhältniß

$$d \div p = 7 \div 22 = 1 \div 3^1/_7.$$

Dieses ist jedoch zu groß, und hat (da $3^1/_7 = 3{\cdot}1428\ldots$ ist) nur noch die zweite Decimale richtig. Dagegen ist $3^{10}/_{71} = 3{\cdot}1408 \ldots$ zu klein, liegt jedoch dem wahren Werthe näher, als $3^1/_7$ oder $3^{10}/_{70}$.

Ein anderes Verhältniß ist das des Holländers Peter Metius, nämlich

$$d \div p = 113 \div 355 \ (= 1 \div 3{\cdot}1415929 \ldots),$$

welches schon viel genauer, leicht im Gedächtnisse zu behalten, aber für den Gebrauch unbequem ist. (Vergl. Arithm. §. 120, Zus.)

---

*) Er war geboren zu Hildesheim 1539, und starb als Professor der Kriegsbaukunst zu Leyden 1610.

IV. Kap. Messung des Kreises und der mit ihm verbundenen Figuren.

§. 253.

Erkl. 1. Die Messung der Kreislinie (oder eines Bogens) durch ein Längenmaß nennt man Rektification derselben, weil man sie zu diesem Behufe als gerade Linie dargestellt (rektifizirt) denken muß.

Zur Rektification des Kreises oder eines Bogens muß der Radius oder Diameter, und bei dem Bogen überdieß die Anzahl seiner Grade gegeben sein.

2. Die Messung der Kreisfläche geschieht durch eines der üblichen Flächenmaße (§§. 169. und 170.).

a) Theoretische Sätze.

§. 254.

Lehrs. Die Peripherie eines Kreises (p) ist gleich dem Produkte aus dem Diameter (d) oder doppelten Radius (r) in die Ludolphine (π).

Thes. $p = d\pi = 2r\pi$. *)

Bew. Für den Radius 1, sowie für jeden andern ist (nach §. 252.) $d \div p = 1 \div \pi$; daher $p = d\pi = 2r\pi$, da $d = 2r$ ist.

Zus. 1. Aus der Gleichung $p = d\pi = 2r\pi$ folgt umgekehrt:

$$\text{I. } d = \frac{p}{\pi}, \text{ und II. } r = \frac{p}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}p}{\pi}; \text{ d. h. } —?$$

Zus. 2. Kreise verhalten sich hinsichtlich ihrer Peripherien wie ihre Radien (oder Diameter). Denn bezeichnen P und p die Peripherien zweier Kreise, R und r ihre Radien, so ist $P = 2R\pi$ und $p = 2r\pi$; daher $P \div p = 2R\pi \div 2r\pi = R \div r$.

§. 255.

Lehrs. Die Länge eines Bogens (b) ist gleich dem 360ten Theile des Produktes aus der Peripherie (p) und der Anzahl seiner Grade (n).

*) Man merke sich für Kreisrechnungen folgende Zahlenwerthe:
1) $\pi = 3{\cdot}1416$; 2) $1 : \pi = 0{\cdot}31831$ und 3) $\lg \pi = 0{\cdot}49715$.

Thes. $b = \frac{p\,n^0}{360} = \frac{d\pi\,n^0}{360} = \frac{r\pi\,n^0}{180}$.

Bew. Da die Anzahl der Grade des zum Bogen gehörigen Centriwinkels gleichfalls n sein muß (§. 60.), so ist

$$b \div p = n \div 4R = n \div 360; \text{ somit}$$

$$b = \frac{pn}{360} = \frac{d\pi n}{360} = \frac{r\pi n}{180} \text{ (§. 254.).}$$

Zus. Aus den Formeln des Lehrsatzes ergeben sich folgende:

$$\text{I. } p = \frac{360\,b}{n}; \text{ II. } n = \frac{360\,b}{p} = \frac{360\,b}{d\pi} = \frac{180\,b}{r\pi};$$

$$\text{III. } d = \frac{360\,b}{n\pi}, \text{ und IV. } r = \frac{180\,b}{n\pi}, \text{ d. h. — ?}$$

Z. B. Setzt man $b = r$, so erhält man aus II. für die Anzahl der Grade eines Bogens, welcher dem Radius gleich ist:

$$n = 180 : 3{\cdot}14159\ldots = 57^0\,17'\,44{\cdot}8'' = 206264{\cdot}8''.$$

§. 256.

Lehrs. Der Flächeninhalt eines Kreises (k) ist gleich dem Produkte aus dem Quadrate des Radius (r) oder dem vierten Theile vom Quadrate des Diameters (d) in die Ludolphine.

Thes. $k = r^2\pi = \frac{1}{4}d^2\pi.$

Bew. Setzt man die Länge der Peripherie $= p$, so ist $k = \frac{1}{2}pr$ (§. 243, Zus. 4.). Nun ist aber $p = 2r\pi = d\pi$ (§. 254.); also $k = \frac{1}{2}r\,.\,2r\pi = r^2\pi = \frac{1}{4}d\,.\,d\pi = \frac{1}{4}d^2\pi.$

Zus. 1. Aus der Formel $k = r^2\pi$ ergibt sich umgekehrt:

$$\text{I. } r = \sqrt{\frac{k}{\pi}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{k\pi}; \text{ also II. } d = \frac{2}{\pi}\sqrt{k\pi} \text{ d. h. — ?}$$

Zus. 2. Substituirt man den eben (Zus. 1.) erhaltenen Werth von r in die Gleichung $p = 2r\pi$; so erhält man:

$$\text{I. } p = 2\sqrt{k\pi}; \text{ und hieraus II. } k = \frac{p^2}{4\pi} = \frac{(\frac{1}{2}p)^2}{\pi}, \text{ d. h. — ?}$$

Zus. 3. Kreise verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate ihrer Radien (oder Diameter). Denn für zwei Kreise K und k mit den Radien R und r ist $K = R^2\pi$ und $k = r^2\pi$; daher $K \div k = R^2\pi \div r^2\pi = R^2 \div r^2.$

Zus. 4. Gleichnamige reguläre Polygone verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser der ihnen um- oder eingeschriebenen Kreise (§. 168. u. §. 244, Zus.).

§. 257.

Lehrs. Der Flächeninhalt eines Sectors (s) ist gleich dem Produkte aus dem 360ten Theile der Kreisfläche (k) in die Anzahl (n) der Grade seines Bogens.

Thes. $s = \frac{kn}{360} = \frac{r^2\pi n}{360}$.

Bew. Bezeichnet man den Bogen des Sectors durch b; so ist $s = \frac{1}{2}br$ (§. 243, Zus. 5.), ferner $k = \frac{1}{2}pr$. Hieraus folgt

$s \div k = b \div p = n \div 360$ (§. 228, Zus. 1.); also

$$s = \frac{kn}{360} = \frac{r^2\pi n}{360}, \text{ indem } k = r^2\pi \text{ ist.}$$

Zus. Aus vorstehender Gleichung folgt umgekehrt:

$$\text{I. } r = \sqrt{\frac{360s}{n\pi}}; \text{ und II. } n^0 = \frac{360s}{r^2\pi}, \text{ d. h. } - ?$$

§. 258.

Lehrs. Der Flächeninhalt eines Segmentes (f) ist gleich dem halben Produkte aus dem Radius in die Differenz zwischen seinem Bogen (b) und der Senkrechten (h) aus dem einen Endpunkte des Bogens auf den an dessen andern Endpunkt gezogenen Radius.

Dat. $\measuredangle AEB = R$. — Thes. $f = \frac{1}{2}r(b-h)$. (Fig. 144.).

Bew. Zieht man noch den Radius AC, so ist offenbar das Segment die Differenz zwischen dem Sector und dem $\triangle ACB$; daher sein Inhalt, d. i.

$f = \text{Sect. } ACB - \triangle ACB$, oder (nach §. 257 u. §. 172.)

$= \frac{1}{2}br - \frac{1}{2}r.AE = \frac{1}{2}r(b-h)$.

Zus. 1. Ist nebst der Anzahl der Grade des Bogens $AB = \measuredangle ACB = n$ der Radius r und die Sehne $AB = s$ gegeben, so folgt unmittelbar (nach §. 257 u. §. 181, II.):

$$f = \frac{r^2\pi n^0}{360} - \frac{s}{4}\sqrt{4r^2 - s^2}.$$

Zus. 2. Setzt man in vorstehender Gleichung 1) statt s

oder 2) statt r seinen Werth aus §. 232; so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$f = \frac{r^2 \pi n^0}{360} - (r-h)\sqrt{h(2r-h)} = \left(\frac{\frac{1}{4}s^2+h^2}{2h}\right)^2 \cdot \frac{\pi n}{360} - \frac{s}{4h}(\tfrac{1}{4}s^2-h^2).$$

Anm. Die Berechnung des Flächeninhaltes eines Segmentes gehört, da der Winkel n oder Bogen AB bekannt sein muß, größtentheils nicht der Planimetrie an, indem sich derselbe aus je zweien von den Größen r, s und h, nur durch die Trigonometrie finden läßt.

§. 259.

Lehrs. Der Inhalt eines Kreisringes (f) ist gleich dem Produkte aus der Ludolphine in die Differenz zwischen dem Quadrate des größern Radius (r) und dem des kleinern (ϱ).

Thes. $f = \pi\,(r^2 - \varrho^2) = \pi\,(r + \varrho)\,(r - \varrho)$.

Bew. Die Ringfläche ist offenbar eine Differenz zweier Kreisflächen; haben nun diese r und ϱ als Radien, so ist ihr Inhalt, oder $f = r^2\pi - \varrho^2\pi = \pi\,(r^2 - \varrho^2) = \frac{1}{4}\pi\,(d^2 - \delta^2)$, wenn die Durchmesser (d und δ) gegeben sind.

Dieser Satz gilt, wie leicht einzusehen, auch für alle excentrischen und Berührungskreise, von welchen der eine ganz innerhalb des andern liegt.

Zus. 1. Ist nur einer der beiden Radien (oder Diameter) und die Breite (β) des Ringes bekannt, so findet sich

$$f = \beta\pi\,(2r \pm \beta) = \beta\pi\,(d \pm \beta),$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem r (oder d) den kleinern oder größern Radius (oder Diameter) bezeichnet.

Zus. 2. Der Inhalt (f) eines Ringausschnittes, d. i. zwischen zwei ähnlichen concentrischen Bogen (§. 228, Anm.) und den Verbindungslinien ihrer Endpunkte eingeschlossenen Fläche, ist eine Differenz zweier Sectoren; bezeichnet daher n die Anzahl der Grade dieser Bogen oder des zugehörigen Centriwinkels, so ist

$$f = \frac{r^2\pi n}{360} - \frac{\varrho^2\pi n}{360} = \frac{n\pi}{360}\,(r^2 - \varrho^2).$$

§. 260.

Lehrs. Der Flächeninhalt (F) eines Vieleckes um einen Kreis ist dem halben Produkte aus dessen Perimeter (P) in den Radius des eingeschriebenen Kreises (r) gleich.

Thes. $F = \frac{1}{2}Pr$.

Bew. Denkt man sich aus dem Mittelpunkte des Kreises gerade Linien nach allen Ecken, und Radien an die Berührungspunkte der Seiten gezogen, so wird das Polygon in lauter Dreiecke getheilt, welche den Radius des Kreises als Höhe haben (§. 209, Zus. 1.). Sind daher die Seiten der Ordnung nach a, b, c....; so ist offenbar $a+b+c.... = P$; dann

$$F = \tfrac{1}{2}r.a + \tfrac{1}{2}r.b + \tfrac{1}{2}r.c.... = \tfrac{1}{2}r(a+b+c....) = \tfrac{1}{2}Pr.$$

Zus. 1. Für jedes reguläre Polygon, dessen Seite c und Seitenzahl n ist, ist $P = cn$; daher $F = \tfrac{1}{2}cnr$.

Zus. 2. Der Inhalt (f) eines Dreieckes um einen Kreis, dessen Seiten a, b, c sind, ist also ausgedrückt durch

$f = \tfrac{1}{2}r(a+b+c)$. — Hieraus folgt umgekehrt:

$r = 2f:(a+b+c) = f:\tfrac{1}{2}(a+b+c)$, d. h. — ?

Setzt man den halben Umfang des Dreieckes, d. i. $\tfrac{1}{2}(a+b+c) = s$, so ist $r = f:s$, oder (nach §. 182.):

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

§. 261.

Lehrs. Der Flächeninhalt (f) eines Dreieckes ist dem Produkte (der Maßzahlen) seiner drei Seiten (a, b, c) getheilt durch den vierfachen Radius (r) des umschriebenen Kreises gleich.

Dat. $AB = a$, $AD = b$ und $BD = c$ (Fig. 133.).

Thes. $f = \dfrac{abc}{4r}$.

Bew. Fällt man $BF \perp AD$, so ist $f = \tfrac{1}{2}AD.BF = \tfrac{1}{2}b.BF$. Wird ferner der Durchmesser BE, und die Sehne AE gezogen, so hat man $\triangle BFD \sim BAE$ (III.), und daher

$BF \div BD = AB \div BE$, oder

$BF \div c = a \div 2r$; mithin

$$BF = \frac{ac}{2r};\ \text{also}\ f = \frac{b}{2}.BF = \frac{abc}{4r}.$$

Zus. Aus der Gleichung des Lehrsatzes folgt umgekehrt:

$$r = \frac{abc}{4f} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

wenn wieder $\tfrac{1}{2}(a+b+c) = s$ gesetzt wird.

Zus. Läßt sich die Seite (a) eines regulären Polygons durch den Radius (r) des umschriebenen Kreises, und umgekehrt bestimmen; so kann auch sein Inhalt durch r oder a bestimmt werden, indem man den Werth von a oder r in obige Formel substituirt.

Z. B. für das reguläre Fünfeck ist $a = r\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}$ (§. 251, Zus. 1.); daher wird

$$f_5 = \tfrac{5}{4} r\sqrt{\tfrac{1}{2}(5-\sqrt{5})} \,.\, \sqrt{4r^2 - \tfrac{1}{2}r^2(5-\sqrt{5})}$$

$$= \tfrac{5}{4} r^2\sqrt{\tfrac{1}{2}(5-\sqrt{5})\,.\,\tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5})}$$

$$= \tfrac{5}{4} r^2\sqrt{\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{5})} = \tfrac{5}{8} r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Umgekehrt hat man $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2+0{\cdot}4\sqrt{5}}$; daher

$$f_5 = \tfrac{5}{4} a\sqrt{4\,.\,\tfrac{1}{4}a^2(2+0{\cdot}4\sqrt{5})-a^2} = \tfrac{5}{4}a^2\sqrt{1+0{\cdot}4\sqrt{5}}.$$

§. 266.

Aufg. Den Flächeninhalt (F_n) eines umschriebenen regulären Vieleckes durch seine Seitenzahl (n), den Radius (r) und die Seite (a) des gleichnamigen eingeschriebenen Polygons auszudrücken.

Aufl. $$F_n = \frac{nar^2}{\sqrt{4r^2-a^2}} = \frac{nar^2\sqrt{4r^2-a^2}}{4r^2-a^2}.$$

Bew. Es ist $F_n = \frac{1}{2}ncr = \frac{1}{2}nr.c$ (§. 260, Zus. 1.). Setzt man in dieser Gleichung $c = 2ar : \sqrt{4r^2-a^2}$ (§. 250, I.), so folgt obige Formel.

Zus. Kennt man also den Werth der Seite eines eingeschriebenen regulären Polygons durch den Radius ausgedrückt; so läßt sich auch der Inhalt des gleichnamigen umschriebenen durch den Radius bestimmen. Z. B. Für das reguläre Dreieck im Kreise ist $a = r\sqrt{3}$; daher wird

$$F_3 = \frac{3r\sqrt{3}\,.\,r^2}{\sqrt{4r^2-3r^2}} = 3r^2\sqrt{3}.$$

§. 267.

Aufg. Aus den vier Seiten (a, b, c, d) eines Viereckes im Kreise I. die beiden Diagonalen (x, y), II. den Radius (r) des Kreises, und III. den Inhalt (f) zu finden.

Aufl. u. Bew. I. Man mache (Fig. 146.) arc DE = arc AB, und ziehe CE, welche die Diagonale BD = y in F schneidet, so hat man $\measuredangle\ \gamma = \alpha$ und m = n (§. 220, Zus. 2.), daher $\triangle$ CFD $\backsim$ ABC; folglich

$$DF \div CD = AB \div AC, \text{ oder}$$
$$DF \div c = a \div x; \text{ also}$$
$$\alpha)\ x \cdot DF = ac.$$

Wegen $\measuredangle\ \alpha = \gamma$ ist auch $\alpha + \beta = \beta + \gamma$, dann $\measuredangle$ p = q, mithin $\triangle$ BCF $\backsim$ ACD, und daher

$$BF \div BC = AD \div AC, \text{ oder}$$
$$BF \div b = d \div x; \text{ also}$$
$$\beta)\ x \cdot BF = bd.$$

Addirt man die Gleichungen α) und β), so wird

$$x\,(DF + BF) = ac + bd, \text{ oder}$$
$$1)\ xy = ac + bd. \text{ — Ferner ist:}$$

$\triangle\ ABC = \frac{abx}{4r}$ und $\triangle\ ACD = \frac{cdx}{4r}$ (§. 261.), ebenso

$\triangle\ BCD = \frac{bcy}{4r}$ und $\triangle\ BAD = \frac{ady}{4r}$; aber

$\triangle$ ABC + ACD = BCD + BAD = ABCD; also auch

$$\frac{abx}{4r} + \frac{cdx}{4r} = \frac{bcy}{4r} + \frac{ady}{4r}, \text{ oder}$$
$$x\,(ab + cd) = y\,(bc + ad), \text{ und daher}$$
$$2)\ \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) findet man nun leicht:

$$x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}, \text{ und } y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

II. Für das $\triangle$ ABC, also auch für das Viereck ABCD ist (nach §. 261, Zus.):

$$r = \frac{abx}{4 \cdot \triangle ABC} = \frac{abx}{\sqrt{[(a+b)^2 - x^2][x^2 - (a-b)^2]}}, \text{ da}$$

$$\triangle\ ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(a+x-b)(b+x-a)},$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - x^2][x^2 - (a-b)^2]} \text{ ist (§. 182, II.).}$$

Substituirt man in die Gleichung für r den oben für x gefundenen Werth, so erhält man nach gehöriger Reduction

$$r=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}},$$

oder, wenn man $a+b+c+d=2s$ setzt:

$$r=\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

III. Es ist $ABCD=\triangle ABC+ACD$; daher

$$f=\frac{abx}{4r}+\frac{cdx}{4r}=\frac{(ab+cd)x}{4r},$$

woraus durch Substitution der für x und r vorhin gefundenen Werthe nach gehöriger Reduction sich ergibt:

$$f=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Anm. Man gebe die Gleichung I. 1) (Ptolemäischer Satz), und die aus I. 2) folgende Proportion in Worten!

Anhang. Von der Rektifikation und Quadratur des Kreises.

§. 268.

Aufg. Eine Kreislinie (annähernd) geometrisch zu rektifiziren.*)

I. Aufl. u. Bew. Man verlängere den dreifachen Diameter (3d) um den fünften Theil der Sehne des Quadranten d. i. um $\frac{1}{5}r\sqrt{2}=\frac{1}{10}d\sqrt{2}$ (§. 240, Zus.); so ist die erhaltene Linie (x) nahe gleich der Peripherie des gegebenen Kreises. Denn es ist dann $x=3d+\frac{1}{10}d\sqrt{2}=3d+0{\cdot}1414d=d.3{\cdot}1414\ldots=d\pi=p$ (§. 254.).

II. Aufl. u. Bew. Man errichte, DF (Fig. 93.) als Diameter des Kreises betrachtet, in einem Endpunkte D die Senkrechte $DM=3r$; und nehme von M aus ein Stück gleich der halben Seite des umschriebenen regulären Sechseckes, mache also

*) Der Forderung mit voller Schärfe zu genügen ist nicht möglich, da das Verhältniß des Diameters zur Peripherie irrational ist. Dasselbe gilt auch in Bezug auf die nachfolgende Aufgabe.

$MN = \frac{1}{8} r\sqrt{3}$ (§. 250, Zus. II, a); so ist die Gerade FN sehr nahe der halben Peripherie gleich. Denn es ist

$$\overline{FN}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{DN}^2 = 4r^2 + (DM - MN)^2 = 4r^2 + (3r - \tfrac{1}{3} r\sqrt{3})^2$$

$$= 13\tfrac{1}{3} r^2 - 2r^2\sqrt{3} = 13{\cdot}3333..r^2 - 3{\cdot}4641 r^2 = 9{\cdot}8692 r^2; \text{ also}$$

$$FN = r\sqrt{9{\cdot}8692} = r \,.\, 3{\cdot}1415 = r\pi = \tfrac{1}{2} p \text{ (§. 254.).}$$

§. 269.

Aufg. Einen Kreis (annähernd) geometrisch zu quadriren.

Aufl. Man ziehe einen Diameter AB (Fig. 106.), theile den Radius $BC = r$ in 7 gleiche Theile, und errichte im vierten Theilpunkte (von C aus) $FE \perp AB$; so ist AE die Seite des gesuchten Quadrates.

Bew. Es ist $AB \div AE \div AF$ (§. 158, Zus. II.); mithin
$\overline{AE}^2 = AB \,.\, AF = 2r(r + \frac{4}{7} r) = \frac{22}{7} r^2 = 3\frac{1}{7} r^2 = r^2\pi$ (§. 252.).

Zus. Umgekehrt ergibt sich der Diameter (d) eines Kreises, der einem Quadrate (a^2) annähernd gleich ist, durch Construction der Proportion $2a \div d \div {}^7/_{11}\, a$; da in diesem Falle $a^2 = \frac{1}{4} x^2 \pi = {}^{11}/_{14}\, x^2$, also $x^2 = {}^{14}/_{11}\, a^2 = 2a \,.\, \frac{7}{11} a$ sein muß. *)

---

*) Genauer läßt sich ein Kreis durch folgendes von Herrn Professor Preyßinger mitgetheiltes Verfahren quadriren:

Man theile den Diameter $AB = d$ (Fig. 106.) in 44 gleiche Theile, errichte in B ein Loth auf AB, nehme darauf 23 jener Theile, mache also $BG = 23d : 44$, und ziehe AG, welche den Kreis in E schneidet; so ist AE die Seite des gesuchten Quadrates. Denn zieht man noch BE, so ist $\measuredangle AEB = R$, also $AG \div AB \div AE$ (§. 143, I.), daher

$$AE = \overline{AB}^2 : AG = d^2 : AG, \text{ und } \overline{AE}^2 = d^4 : \overline{AG}^2.$$

Es ist aber $\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 = d^2 + \left(\frac{23d}{44}\right)^2 = \frac{2465 d^2}{1936}$.

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung für $\overline{AE}^2$, so wird

$$\overline{AE}^2 = d^4 : \frac{2465 d^2}{1936} = \frac{1936 d^2}{2465} = 0{\cdot}7853955\ldots d^2,$$

$$= {}^1/_4\, d^2 . 4 . 0{\cdot}7853955 = {}^1/_4\, d^2 . 3{\cdot}141582 = {}^1/_4\, d^2 \pi \text{ (§. 256.).}$$

Soll umgekehrt ein Quadrat in einen Kreis verwandelt werden, so theile man dessen Seite $AB = a$ in 44 gleiche Theile, mache die auf AB senkrechte Linie $BG = 23a : 44$; dann ist AG der Durchmesser des gesuchten Kreises. (Bew. ganz ähnlich.)

II. Theil. Stereometrie.

§. 270.

Erkl. 1. Die Stereometrie oder körperliche Geometrie ist jener Theil der Geometrie, welcher alle Untersuchungen über Raumgrößen umfaßt, die sich auf Constructionen in mehr als einer Ebene (§. 19, 2.) beziehen.

2. Die Stereometrie handelt I. von der gegenseitigen Lage gerader Linien und Ebenen im Raume, dann II. von ihrem eigentlichen Gegenstande, den geometrischen Körpern.

I. Abschnitt. Von der Lage gerader Linien und Ebenen.

§. 271.

Erkl. Eine Ebene so legen, daß eine gegebene gerade Linie ganz in ihr liegt, heißt die Ebene durch die Gerade legen.

Zus. 1. Durch eine gerade Linie im Raume gibt es unendlich viele Ebenen.

Zus. 2. Eine Gerade liegt ganz in einer Ebene, sobald sie zwei Punkte mit derselben gemeinschaftlich hat.

§. 272.

Lehrs. Eine Ebene ist durch drei nicht in einer geraden Linie liegenden Punkte (ihrer Lage nach) bestimmt.

Bew. Denkt man sich zwei der gegebenen Punkte durch eine Gerade verbunden, so kann durch diese eine Ebene gelegt, und um die Gerade, gleichsam wie um eine Achse, herum bewegt werden. Bei dieser Drehung kommt die Ebene in unendlich verschiedene Lagen, folglich auch in eine solche, daß der dritte Punkt in ihr liegt, durch welchen aber auch ihre Lage bestimmt ist, indem bei jeder weitern Drehung der Punkt nicht mehr in der Ebene liegen würde.

Zus. 1. Die Lage einer Ebene ist also durch eine Gerade und einen Punkt außer ihr bestimmt.

Zus. 2. Die Schenkel eines Winkels, zwei sich schneidende Gerade, Parallellinien, ein Dreieck, ein Kreisbogen bestimmen gleichfalls die Lage einer Ebene.

Zus. 3. Zwei Ebenen, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, müssen auch eine gerade Linie gemeinschaftlich haben.

Zus. 4. Zwei Ebenen, welche drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gemeinschaftlich haben, fallen ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammen (Zus. 1.).

I. Kap. Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen.

§. 273.

Erkl. 1. Eine gerade Linie, welche mit einer Ebene nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich hat, heißt a) auf der Ebene, wenn sie nur einen ihrer Endpunkte in derselben hat, den man ihren Stand- oder Fußpunkt nennt, b) durch die Ebene, wenn sie diese durchschneidet, wobei dann der beiden gemeinschaftliche Punkt der Durchschnittspunkt oder der Durchgang der Geraden durch die Ebene genannt wird.

2. Zwei verschiedene Ebenen, die nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, kann man sich immer so erweitert denken, daß sie in mehreren Punkten sich treffen, oder die eine durch die andere hindurch geht, d. h. daß sie sich schneiden. Dieses geschieht in einer beiden Ebenen gemeinschaftlichen Linie, welche ihre Durchschnittslinie oder ihr Durchschnitt genannt wird, und stets eine gerade Linie ist (§. 272, Zus. 4.).

§. 274.

Erkl. 1. Eine gerade Linie heißt auf eine Ebene senkrecht, wenn sie auf allen Geraden, die in der Ebene durch ihren Fußpunkt gezogen werden, senkrecht steht; außerdem steht sie auf der Ebene schief, oder ist gegen dieselbe geneigt.

2. Eine Gerade ist zu einer Ebene parallel, wenn sie mit der letztern niemals zusammentrifft.

Zus. Ist eine Gerade senkrecht auf eine Ebene, so ist auch ihre Verlängerung durch den Fußpunkt darauf senkrecht.

a) Theoretische Sätze.

§. 275.

Lehrs. Steht eine Gerade auf zwei in einer Ebene durch ihren Fußpunkt gezogenen geraden Linien senkrecht; so steht sie auf der Ebene selbst senkrecht.

Dat. $\measuredangle$ ABC = ABD = R (Fig. 147.).

Thes. AB $\perp$ pl. MN *).

Bew. Man mache BE = BD, BF = BC, und ziehe CD und EF, so ist $\triangle$ CBD $\cong$ FBE (I.); daher

1) CD = EF, und $\measuredangle$ BDC = BEF.

Zieht man ferner durch den Punkt B willkührlich die Gerade GH, so ist $\triangle$ BDG $\cong$ BEH (III.); folglich

2) DG = EH, und BG = BH.

Denkt man sich durch die Punkte A, C und F eine Ebene gelegt, und in derselben AC und AF gezogen, so ist $\triangle$ ABC $\cong$ ABF (I.); mithin 3) AC = AF.

Aus demselben Grunde ist, wenn man in der durch A, D und E gelegten Ebene AD und AE zieht, $\triangle$ ABD $\cong$ ABE; also

4) AD = AE.

Dem Vorhergehenden gemäß ist $\triangle$ ADC $\cong$ AEF (II.); folglich

5) $\measuredangle$ ADC = AEF.

Zieht man in den Ebenen der Winkel ADC und AEF die Geraden AG und AH, so ist $\triangle$ ADG $\cong$ AEH (I); somit

6) AG = AH.

Endlich hat man $\triangle$ ABG $\cong$ ABH (II.); daher

7) $\measuredangle$ ABG = ABH = R (§. 29, Zus.).

Da nun GH die Stelle jeder andern Geraden durch B in der Ebene MN vertritt, so ist AB $\perp$ pl. MN (§. 274, 1.).

§. 276.

Lehrs. Durch einen bestimmten Punkt gibt es auf eine Ebene nur eine einzige Senkrechte, der Punkt mag I. außer, oder II. in der Ebene liegen.

I. Dat. AB $\perp$ pl. MN. — Thes. AE $\not\perp$ pl. MN (Fig. 148.).

---

*) Das Zeichen „pl." bedeutet hier und für die Folge stets „Ebene (planum)."

Bew. Wäre AE ⊥ pl. MN, so müßte, wenn man BE zieht, ∡ AEB = R = ABE sein, was unmöglich ist (§. 77, Zus. 2.).

II. Dat. CD ⊥ pl. MN. — Thes. CF ⊥̸ pl. MN.

Bew. Wäre auch CF ⊥ pl. MN, so könnte man durch ∡ DCF eine Ebene legen, welche pl. MN in einer Geraden, etwa CG schnitte, und es müßte ∡ FCG = R = DCG sein, was wieder unmöglich ist (§. 31.).

Zus. 1. Die Senkrechte ist die kürzeste Gerade, welche von einem Punkte außerhalb einer Ebene an diese gezogen werden kann; denn als Hypotenuse ist jede andere Linie AE > AB (§. 93, Zus. 1.).

Zus. 2. Die Entfernung oder der Abstand eines Punktes von einer Ebene ist daher die Senkrechte von jenem auf diese.

§. 277.

Lehrs. Werden schiefe Linien von einem Punkte außerhalb einer Ebene an diese so gezogen, daß ihre Fußpunkte gleichweit vom Fußpunkte der aus jenem Punkte herabgelassenen Senkrechten entfernt sind; so sind sie einander gleich.

Dat. BC = BD; AB ⊥ pl. MN (Fig. 149.).

Thes. AC = AD.

Bew. Es ist △ ABC ≅ ABD (I.); also AC = AD.

Zus. 1. Sind umgekehrt von einem Punkte an eine Ebene gleiche schiefe Linien gezogen, so sind ihre Fußpunkte von dem der Senkrechten gleichweit entfernt; liegen somit in der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt der Senkrechten, und dessen Radius die Entfernung des Standpunktes einer schiefen von dem der senkrechten Linie ist.

Zus. 2. Sind die Entfernungen schiefer Linien vom Fußpunkte der Senkrechten ungleich; so ist die entferntere die größere. Denn ist BE > BC, und man macht BF = BC und zieht AF, so ist AF = AC (Lehrs.). Es ist aber ∡ AFE > ABE (§. 78, Zus. 1.), oder ∡ AFE > R; daher AE > AF oder AE > AC (§. 93, Zus. 1.).

§. 278.

Lehrs. Steht eine gerade Linie auf drei andern Geraden in demselben Punkte senkrecht; so liegen diese in einer Ebene.

Dat. ∡ ABC = ABD = ABE = R (Fig. 150.).

Bew. Legt man durch ∡ CBD eine Ebene, so ist AB auf ihr senkrecht (§. 275.). Fiele nun BE nicht in die Ebene CBD, so könnte man durch ∡ ABE eine Ebene legen, welche pl. CBD in einer Geraden BF schnitte, und es wäre ∡ ABF = R = ABE, was unmöglich ist (§. 31.).

§. 279.

Lehrs. Steht von zwei parallelen Linien die eine auf einer Ebene senkrecht; so ist auch die andere darauf senkrecht.

Dat. AB ⫲ CD, und AB ⊥ pl. MN (Fig. 151.).

Thes. CD ⊥ pl. MN.

Bew. Die beiden Parallelen liegen in einer Ebene (§. 272, Zus. 2.), und es ist, wenn man BD zieht, ∡ CDB = R (§. 45, Zus. 2.). Errichtet man nun in D auf BD in der Ebene MN die Senkrechte DE = AB, zieht BE, und in der Ebene der Parallelen AD, so ist △ ABD ≅ BDE (I.); daher AD = BE.

Zieht man noch AE, so hat man △ ADE ≅ ABE (II.); also ∡ ADE = ABE = R = BDE.

Es steht also DE senkrecht auf der Ebene der Parallelen (§. 275.); mithin auch auf CD, und es ist somit, da ∡ CDB = R = CDE ist, CD ⊥ pl. MN (§. 275.).

Zus. Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Ebene auf diese und eine Gerade in ihr Perpendikel; so steht die ihre Fußpunkte verbindende Linie auf jener Geraden senkrecht. Denn ist AB ⊥ pl. MN, und AD ⊥ DE, und man legt durch ABD eine Ebene, und zieht in dieser DC ⫲ AB, so ist DC ⊥ pl. MN (Lehrs.), also ∡ CDE = R = ADE; daher auch ∡ BDE = R (§. 275.).

§. 280.

Lehrs. Zwei gerade Linien, welche auf derselben Ebene senkrecht stehen, sind parallel.

Dat. AB und CD ⊥ pl. MN (Fig. 148.).

Thes. CD ⫲ AB.

Bew. Wäre CD ∧ AB, so könnte man durch AB und C eine Ebene legen, und in dieser CF ⫲ AB ziehen; und es wäre dann CF ⊥ pl. MN (§. 279.), was aber, da CD ⊥ pl. MN steht, unmöglich ist (§. 276, II.). Also ist CD ⫲ AB.

Zus. Zwei (oder mehrere) Gerade, welche derselben dritten parallel sind, sind auch, wenn sie gleich nicht in der nämlichen Ebene liegen, unter sich parallel. Denn denkt man sich durch die drei Linien eine Ebene so, daß die dritte auf ihr senkrecht steht, so sind auch die beiden andern darauf senkrecht (§. 279.); mithin zu einander parallel (Lehrs.).

§. 281.

Lehrs. Sind die Schenkel zweier gleichnamiger Winkel, welche in verschiedenen Ebenen liegen, beziehungsweise parallel; so sind die Winkel gleich.

Dat. AB ╫ DE; BC ╫ EF (Fig. 152.).

Thes. $\measuredangle$ ABC = DEF.

Bew. Macht man AB = DE, und BC = EF, und zieht in den durch die Parallelen gelegten Ebenen, welche sich in BE schneiden, AD und CF, so ist wegen AB # DE die Figur AE ein Parallelogramm (§. 99, II.); mithin auch AD # BE. Aus demselben Grunde ist auch CF # BE, daher AD # CF (§. 280, Zus.); deßhalb, wenn man noch AC und DF zieht, AF ein Parallelogramm, also AC = DF. Es folgt somit $\triangle$ ABC $\cong$ DEF (II.); daher $\measuredangle$ ABC = DEF.

§. 282.

Lehrs. Ist eine gerade Linie außerhalb einer Ebene parallel zu einer Geraden in der Ebene; so ist sie zur Ebene selbst parallel.

Dat. AB ╫ CD. — Thes. AB ╫ pl. MN (Fig. 153.).

Bew. Legt man durch die beiden Parallelen eine Ebene, so ist CD ihr Durchschnitt mit pl. MN. Würde nun AB die Ebene MN treffen, so könnte dieß nur in irgend einem Punkte des Durchschnittes beider Ebenen, d. i. in der Geraden CD, geschehen, was unmöglich ist (Dat.) Folglich ist AB ╫ pl. MN.

Zus. Sind zwei gerade Linien parallel, so ist jede von ihnen zu jeder durch die andere gelegten Ebene parallel.

§. 283.

Lehrs. Ist eine Gerade zu einer Ebene parallel; so ist sie auch zu jeder Geraden parallel, in welcher eine durch sie gelegte Ebene die gegebene Ebene schneidet.

Dat. AB ╫ pl. MN. — Thes. AB ╫ CD (Fig. 153.).

Bew. Es sei CD der Durchschnitt irgend einer durch AB und pl. MN gelegten Ebene. Wäre nun AB $\wedge$ CD, so müßte sie CD in einem Punkte treffen, welcher auch in der Ebene MN liegt; somit diese selbst schneiden, was gegen die Voraussetzung ist. Es ist daher AB $\#$ CD.

Zus. Eine gerade, zu einer Ebene parallele Linie ist von derselben überall gleichweit entfernt. Denn, nimmt man in der Linie AB zwei beliebige Punkte A und G, und denkt sich aus diesen AC und GH $\perp$ pl. MN, ferner noch CH gezogen, so ist AC $\#$ GH (§. 280.), ebenso AG $\#$ CH (Lehrs.); daher AC $=$ GH (§. 98, Zus. 2.).

§. 284.

Erkl. 1. Steht eine gerade Linie auf einer Ebene schief, und man fällt aus irgend einem Punkte derselben eine Senkrechte auf die Ebene, und verbindet deren Fußpunkt mit dem der schiefen Linie durch eine Gerade, so heißt der von den beiden letztern eingeschlossene Winkel der Neigungswinkel oder die Neigung der schiefen Linie gegen die Ebene.

Die Senkrechte AC (Fig. 154.) wird auch projektirende Linie, und die Gerade BC zwischen ihrem und dem Fußpunkte der schiefen Linie AB die Projektion der letztern in der Ebene genannt.

2) Die Ebene, welche durch den Neigungswinkel bestimmt ist, heißt die Ebene des Neigungswinkels.

§. 285.

Lehrs. Unter allen Winkeln, welche eine schiefe Linie mit den Geraden, die in einer Ebene durch ihren Fußpunkt gezogen werden, einschließt, ist der Neigungswinkel der kleinste.

Dat. AB $\angle$ pl. MN; AC $\perp$ pl. MN (Fig. 154.).

Thes. $\measuredangle$ ABC $<$ ABD.

Bew. Macht man BE $=$ BC, und zieht AE, so ist AC $<$ AE (§. 276, Zus.); daher auch $\measuredangle$ ABC $<$ ABD (§. 90, II.).

§. 286.

Lehrs. Parallele, auf derselben Ebene schief stehende gerade Linien, haben gegen diese Ebene gleiche Neigung.

Dat. AB $\#$ CD; AE und CF $\perp$ pl. MN (Fig. 155.).

Thes. $\measuredangle$ ABE $=$ CDF.

Bew. Es sind ∢ ABE und CDF die Neigungswinkel der schiefen Linien gegen pl. MN; ferner ist ∢ AEB = CFD = R, und, wegen AE ╫ CF (§. 280.), auch ∢ BAE = DCF (§. 281.); mithin ∢ ABE = CDF (§. 77, Zus. 5.).

b) Praktische Sätze.

§. 287.

Aufg. Von einem Punkte außer einer Ebene auf diese eine Senkrechte zu fällen.

Aufl. Man ziehe (Fig. 156.) in der Ebene MN eine beliebige Gerade BC, lege durch sie und den gegebenen Punkt A eine Ebene, und ziehe in dieser AD ⊥ BC, dann in der Ebene MN durch D die Linie DE ⊥ BC; durch ∢ ADE lege man noch eine Ebene, und fälle in dieser AF ⊥ DE; so ist AF ⊥ pl. MN.

Bew. Zieht man in der Ebene MN die Gerade FG ╫ BC, so ist, da ∢ CDA = CDE = R, CD ⊥ pl. ADE, also auch FG ⊥ pl. ADE (§. 279.); mithin ∢ AFG = R = AFD, und daher AF ⊥ pl. MN (§. 275.).

§. 288.

Aufg. In einem Punkte einer Ebene auf diese eine Senkrechte zu errichten.

Aufl. u. Bew. Es sei K (Fig. 156.) der gegebene Punkt. Man fälle aus einem beliebigen Punkte A außerhalb der Ebene auf diese das Loth AF, lege durch AF und K eine Ebene, und ziehe in dieser KL ╫ AF; so ist KL ⊥ pl. MN (§. 279.).

§. 289.

Aufg. Durch einen bestimmten Punkt auf eine gegebene gerade Linie eine Ebene senkrecht zu legen.

Aufl. u. Bew. I. Liegt der gegebene Punkt B (Fig. 151.) in der Geraden AB, so lege man durch AB zwei beliebige verschiedene Ebenen ABD und ABE, und errichte in diesen auf AB durch B die Perpendikel BD und BE; so ist AB auf der durch den ∢ DBE gelegten Ebene MN senkrecht (§. 275.).

II. Liegt der gegebene Punkt D (Fig. 151.) außerhalb der Geraden AB, so lege man durch AB und den Punkt D eine Ebene,

fälle in dieser aus D die Gerade DB ⊥ AB, lege durch AB noch eine andere Ebene ABE, und errichte in ihr BE ⊥ AB; so steht AB senkrecht auf der durch den ∡ DBE gelegten Ebene MN (§. 275.).

§. 290.

Aufg. Durch einen gegebenen Punkt zu einer Ebene eine Parallellinie zu ziehen.

Aufl. u. Bew. Man ziehe (Fig. 153.) in pl. MN eine Gerade CD, lege durch sie und den gegebenen Punkt A eine Ebene, und ziehe in ihr AB ╫ CD; so ist AB ╫ pl. MN (§. 282.).

Zus. Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene können zu dieser unendlich viele parallele Linien gezogen werden.

§. 291.

Aufg. Durch einen Punkt eine gerade Linie unter gegebenem Neigungswinkel an eine Ebene zu ziehen.

Aufl. u. Bew. I. Liegt der gegebene Punkt B (Fig. 154.) in der Ebene MN, so ziehe man in ihr eine beliebige Gerade BC, errichte in einem willkührlichen Punkte C derselben die Gerade CA ⊥ pl. MN, lege durch ∡ ABC eine Ebene, und construire in dieser am Punkte B der Linie CB den gegebenen Winkel; so ist AB die verlangte Linie (§. 284.).

II. Der Punkt A (Fig. 157.) liege außerhalb der Ebene MN. Man fälle AB ⊥ pl. MN, lege durch AB eine Ebene, welche pl. MN in der Geraden CD schneidet, construire in ihr an BD den gegebenen ∡ DBE, und ziehe in derselben Ebene AF ╫ BE; so ist AF die verlangte Linie (§. 45, III. und §. 284.).

II. Kap. Von der gegenseitigen Lage zweier oder mehrerer Ebenen.

§. 292.

Erkl. 1. Zwei (oder mehrere) Ebenen, welche, soweit man sich dieselben auch erweitert denken mag, niemals zusammentreffen, heißen parallel, oder Parallelebenen.

2. Schneiden sich zwei Ebenen, so heißt der Winkel, welchen zwei in demselben Punkte ihres Durchschnittes senkrecht auf diesen in den beiden Ebenen gezogene gerade Linien einschließen, der Nei-

gungswinkel der Ebenen gegen einander. Ist derselbe ein Rechter, dann stehen die Ebenen auf einander senkrecht, außerdem schief.

3. Der unbegrenzte Raum zwischen zwei sich schneidenden Ebenen wird ein Flächenwinkel genannt. Die beiden Ebenen heißen die Schenkel, und ihre Durchschnittslinie der Scheitel oder die Kante des Flächenwinkels. Seine Größe ist durch den Neigungswinkels seiner Schenkel bestimmt.

Wir bezeichnen einen Flächenwinkel in der Folge durch zwei an seine Kante geschriebene Buchstaben mit Voransetzung des Winkelzeichens, so daß also (Fig. 161.) ∡ BM mit dem Neigungswinkel EAC identisch ist.

Zus. 1. Der Durchschnitt zweier Ebenen ist senkrecht auf der Ebene ihres Neigungswinkels (§. 275.).

Zus. 2. Gleiche Flächenwinkel sind stets auch congruent.

a) Theoretische Sätze.

§. 293.

Lehrs. Eine gerade Linie kann auf zwei sich schneidenden Ebenen nicht zugleich senkrecht sein, sie mag durch einen Punkt I. zwischen beiden Ebenen, oder II. in ihrem Durchschnitte gehen.

I. Dat. AB ⊥ pl. MN. — Thes. AB ⊥̸ pl. PQ (Fig. 158.).

Bew. Zieht man nach einem beliebigen Punkte D des Durchschnittes in beiden Ebenen die Geraden AD und BD, so ist ∡ ABD = R (Dat.); es müßte aber auch ∡ DAB = R sein, was unmöglich ist (§. 77, Zus. 2.). Also ist AB ⊥̸ pl. PQ.

II. Dat. CD ⊥ pl. MN. — Thes. CD ⊥̸ pl. PQ.

Bew. Zieht man beliebig in der Ebene MN die Gerade DB, und legt durch ∡ CDB eine Ebene, welche pl. PQ in DA schneidet; so hätte man in derselben Ebene CDB, da ∡ CDA = R = CDB sein müßte, in D zwei Senkrechte auf CD, was unmöglich ist (§. 31.).

§. 294.

Lehrs. Steht eine gerade Linie auf zwei Ebenen zugleich senkrecht; so sind diese parallel.

Dat. AB ⊥ pl. MN und pl. PQ (Fig. 159.).

Thes. Pl. MN ∦ PQ.

Bew. Würden sich die beiden Ebenen irgend einmal schneiden, so müßte AB auf zwei sich schneidenden Ebenen zugleich senk-

recht sein können; dieses ist aber nicht möglich (§. 293, I.). Also können sich die Ebenen nie schneiden, sind daher parallel.

Zus. Stehen zwei Ebenen auf derselben Geraden senkrecht; so sind sie parallel.

§. 295.

Lehrs. Sind die Schenkel zweier in verschiedenen Ebenen liegender Winkel beziehungsweise parallel; so sind auch ihre (d. i. die durch sie gelegten) Ebenen parallel.

Dat. AB ⫲ DE; BC ⫲ EF (Fig. 160.).

Thes. pl. MN ⫲ PQ.

Bew. Man fälle BG ⊥ pl. PQ, ziehe GH ⫲ ED und GK ⫲ EF; dann ist GH ⫲ AB und GK ⫲ BC (§. 280, Zus.). Es ist aber ∡ BGH = R = BGK, daher auch ∡ GBA = R = GBC (§. 45, Zus. 1.), folglich BG ⊥ pl. MN; mithin pl. MN ⫲ PQ (§. 294.).

§. 296.

Lehrs. Werden zwei Parallelebenen von einer dritten Ebene geschnitten; so sind die Durchschnittslinien parallel.

Dat. pl. MN ⫲ PQ. — Thes. BM ⫲ DP (Fig. 161.).

Bew. Könnten die Durchschnittslinien sich schneiden, so müßten auch die Ebenen MN und PQ, in welchen sie liegen, sich treffen können, was nach der Voraussetzung unmöglich ist.

Zus. 1. Parallele Linien zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich; denn sie schließen mit den Durchschnittslinien, welche eine durch sie gelegte Ebene in den beiden Ebenen macht, ein Parallelogramm ein (Lehrs. und §. 98, Zus. 2.).

Zus. 2. Alle Senkrechten zwischen Parallelebenen sind einander gleich; daher sind Parallelebenen überall gleichweit von einander entfernt.

§. 297.

Lehrs. Steht eine gerade Linie auf einer von zwei Parallelebenen senkrecht; so ist sie auch senkrecht auf der andern.

Dat. pl. MN ⫲ PQ; AB ⊥ pl. MN (Fig. 159.).

Thes. AB ⊥ pl. PQ.

Bew. Man ziehe in der Ebene MN beliebig die Geraden BC und BD, lege durch ∡ ABC und ABD Ebenen, so schneiden

diese pl. PQ in den Geraden AE und AF. Nun ist $AE \parallel BC$ und $AF \parallel BD$ (§. 296.), mithin, da $\measuredangle ABC = R = ABD$ ist, auch $\measuredangle BAE = R = BAF$ (§. 45, Zus. 1.); also $AB \perp$ pl. PQ.

Zus. 1. Durch einen bestimmten Punkt gibt es zu einer Ebene nur eine einzige Parallelebene. Denn gäbe es durch A außer PQ noch eine andere zu pl. MN parallele Ebene, so müßte AB auch auf dieser senkrecht sein, was unmöglich ist (§. 293, II.).

Zus. 2. Sind zwei Ebenen der nämlichen dritten parallel, so sind sie es auch unter sich. Denn errichtet man auf der dritten eine Senkrechte, so steht diese auch senkrecht auf den beiden andern (Lehrs.); also sind auch diese parallel (§. 294.).

§. 298.

Lehrs. Eine gerade Linie hat gegen parallele Ebenen gleiche Neigung.

Dat. pl. $MN \parallel PQ$ (Fig. 162.).

Bew. Fällt man $BC \perp$ pl. MN, $AD \perp$ pl. PQ, und zieht AC und BD, so hat man die Neigungswinkel BAC und ABD. Nun ist aber $BC = AD$ (§. 296, Zus. 2.), daher $\triangle BAC \cong ABD$ (IV.); also auch $\measuredangle BAC = ABD$.

§. 299.

Lehrs. Gerade Linien zwischen parallelen Ebenen werden von einer dritten Parallelebene proportional geschnitten.

Dat. pl. $MN \parallel PQ \parallel RS$ (Fig. 163.).

Thes. $AE \div CG = AB \div CD = BE \div DG$.

Bew. Zieht man AD, welche pl. PQ in F schneidet, und denkt sich durch $\measuredangle BAD$ und ADC Ebenen gelegt, so ist der Durchschnitt $EF \parallel BD$, und $FG \parallel AC$ (§. 296.); daher

$AE \div AF = AB \div AD = BE \div DF$ (§. 140.), ebenso
$AF \div CG = AD \div CD = DF \div DG$; mithin auch

$AE \div CG = AB \div CD = BE \div DG$.

§. 300.

Lehrs. Steht eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht; so steht auch jede durch sie gelegte Ebene auf der erstern Ebene senkrecht.

Dat. $AB \perp$ pl. MN. — Thes. pl. $CP \perp$ pl. MN (Fig. 164.).

Bew. Man ziehe in pl. MN die Linie BE senkrecht auf

den Durchschnitt CD, so ist ABE der Neigungswinkel beider Ebenen. Es ist aber auch AB ⊥ BE, also ∡ABE = R; daher pl. CP ⊥ pl. MN (§. 292, 2.).

Zus. 1. Stehen umgekehrt zwei Ebenen auf einander senkrecht; so steht jede Gerade, welche in der einen senkrecht auf den Durchschnitt gezogen wird, auch senkrecht auf der andern. Denn ist AB ⊥ CD, und zieht man in der Ebene MN die Linie BE ⊥ CD, so ist ABE der Neigungswinkel beider Ebenen; es ist aber ∡ABE = R = ABD, mithin AB ⊥ pl. MN.

Zus. 2. Errichtet man im Durchschnitte zweier auf einander senkrechter Ebenen ein Perpendikel auf die eine; so fällt dieses in die andere Ebene. Denn fiele BA ⊥ pl. MN nicht in die Ebene CP, so könnte man in dieser eine Senkrechte auf CD errichten, die auch senkrecht wäre auf pl. MN (Zus. 1.); man hätte also auf pl. MN zwei Senkrechte in einem Punkte, was unmöglich ist (§. 276, II.).

§. 301.

Lehrs. Stehen zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht; so steht auch ihr Durchschnitt auf der letztern (dritten) Ebene senkrecht.

Dat. pl. AC und pl. AD ⊥ pl. MN (Fig. 165.).

Thes. AB ⊥ pl. MN.

Bew. Man errichte in der Ebene MN in B die Geraden BE ⊥ BC und BF ⊥ BD; dann ist BE ⊥ pl. AC (§. 300, Zus. 1.), also auch BE ⊥ AB; ebenso ist BF ⊥ pl. AD, daher BF ⊥ AB; mithin AB ⊥ pl. MN (§. 275.).

§. 302.

Lehrs. Werden zwei Parallelebenen von einer dritten geschnitten; so sind die Neigungswinkel der erstern gegen die letztere (dritte Ebene) gleich.

Dat. pl. MN ⫲ PQ. — Thes. ∡BM = ∡DP (Fig. 161.).

Bew. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt A in den Ebenen MR und MN auf den Durchschnitt BM die Senkrechten AC und AE; so ist ∡EAC der Neigungswinkel dieser Ebenen. Legt man ferner durch ∡EAC eine Ebene, so schneidet diese pl. PQ in FG ⫲ AE (§. 296.). Weil nun AM ⊥ pl. EAC (§. 292, Zus. 1.),

so ist auch FP $\perp$ pl. EAC, folglich $\measuredangle$ PFC = R = PFG, und daher $\measuredangle$ GFC der Neigungswinkel der Ebenen MR und PQ.

Weil endlich AE $\parallel$ FG, so ist $\measuredangle$ EAC = GFC (§. 45, III.), oder $\measuredangle$ BM = $\measuredangle$ DP.

§. 303.

Lehrs. Werden zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien und unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten; so sind sie parallel.

Dat. BM $\parallel$ DP; $\measuredangle$ BM = $\measuredangle$ DP (Fig. 161.).

Thes. pl. MN $\parallel$ PQ.

Bew. Man errichte in einem beliebigen Punkte A des Durchschnittes der Ebenen MR und MN die Linien AC und AE $\perp$ BM, so ist $\measuredangle$ EAC der Neigungswinkel dieser Ebenen. Legt man ferner durch den $\measuredangle$ EAC eine Ebene, welche pl. PQ in FG schneidet, so steht DP, weil DP $\parallel$ BM ist, auf ihr senkrecht (§. 279.), also auch auf FC und FG; daher ist GFC der Neigungswinkel der Ebenen MR und PQ.

Da aber $\measuredangle$ EAC = GFC (Dat.), so ist AE $\parallel$ FG, und weil auch AM $\parallel$ FP ist; so ist pl. MN $\parallel$ PQ (§. 295.).

b) Praktische Sätze.

§. 304.

Aufg. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, die zu einer gegebenen Ebene parallel ist.

Aufl. u. Bew. Man ziehe (Fig. 159.) aus dem gegebenen Punkte A willkührlich die Gerade AB auf pl. MN, dann in dieser durch deren Fußpunkt B beliebig die Geraden BC und BD, lege durch die Winkel ABC und ABD Ebenen, und ziehe in ihnen AE $\parallel$ BC und AF $\parallel$ BD; so ist die durch den $\measuredangle$ EAF gelegte Ebene PQ $\parallel$ pl. MN (§. 295.).

§. 305.

Aufg. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen, welche auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

Aufl. u. Bew. Die gegebene Linie liegt entweder in oder außerhalb der Ebene. Im ersten Falle errichte man in einem

beliebigen Punkte der Linie eine Senkrechte, im zweiten fälle man ein Perpendikel auf die Ebene, und lege in beiden Fällen durch die gegebene Linie und die gezogene Senkrechte eine Ebene; so ist diese die verlangte (§. 300.).

Zus. Auf dieselbe Art wird auch durch einen gegebenen Punkt eine Ebene senkrecht auf eine gegebene gelegt.

§. 306.

Aufg. Eine Ebene unter gegebenem Neigungswinkel an eine gegebene Ebene zu legen.

Aufl. Man nehme (Fig. 156.) in der gegebenen Ebene MN eine beliebige Gerade BC, errichte auf sie in einem willkührlichen Punkte D die Senkrechte DE, und in einem Punkte F der letztern FA ⊥ pl. MN, lege durch ∡ AFD eine Ebene, und construire in dieser an DE im Punkte D einen ∡ FDA gleich dem gegebenen; so ist die durch A, B und C gelegte Ebene die verlangte.

Bew. Da AF ⊥ pl. MN, so ist pl. ADE ⊥ pl. MN, folglich auch, weil CD ⊥ DE ist, CD ⊥ pl. ADE (§. 300, Zus. 1.), somit ∡ CDE = R = CDA; daher ADE der Neigungswinkel der durch A, B und C gelegten Ebene gegen pl. MN (§. 292, 2.).

III. Kap. Von den körperlichen Winkeln.

§. 307.

Erkl. 1. Ein Körperwinkel oder eine körperliche Ecke ist der unbegrenzte Raum zwischen mehreren in einem Punkte zusammenstoßenden Ebenen, von denen je zwei aufeinander folgende sich schneiden.

Der Punkt, in welchem die Ebenen zusammenstoßen, heißt Scheitel oder Spitze, die Ebenen selbst nennt man Seiten, und ihre Durchschnitte, deren Anzahl so groß als die der Seiten ist, die Kanten der Ecke.

2. Die Winkel, welche von je zwei aufeinander folgenden Kanten an der Spitze der Ecke eingeschlossen werden, heißen Seiten- oder Kantenwinkel; die Neigungswinkel zweier aufeinander folgender Seiten Flächenwinkel oder kurz Winkel der Ecke.

Die Bezeichnung einer Ecke geschieht entweder durch einen an den Scheitel geschriebenen Buchstaben allein, oder durch Benennung aller Seiten, jedoch so, daß der Buchstabe am Scheitel die erste Stelle einnimmt.

3. Die Ecken werden nach der Anzahl ihrer Kanten oder Seiten drei=, vier=, mehr=, vielkantig oder =seitig genannt.

Die dreikantige Ecke nennt man auch ein körperliches Dreieck, Triëder oder Dreikant, jede mehrkantige ein körperliches Vieleck.

Zus. Zur Bildung eines Körperwinkels sind wenigstens drei Ebenen nothwendig (§. 273, 2.).

§. 308.

Erkl. 1. Zwei Körperwinkel, welche den Scheitel gemeinsam haben, und bei welchen die Kanten des einen die verlängerten Kanten des andern sind, heißen Vertikal= oder Scheitelecken.

2. Errichtet man im Scheitel einer Ecke auf die Seiten derselben senkrechte Linien und legt durch je zwei aufeinander folgende von ihnen Ebenen, so entsteht ein Körperwinkel, welcher die Polarecke des gegebenen genannt wird.

a) Theoretische Sätze.

§. 309.

Lehrs. Construirt man zu einem Körperwinkel die Polarecke; so ergänzen sich die Kantenwinkel der einen und die entsprechenden Flächenwinkel der andern gegenseitig zu 2R.

Dat. AE $\perp$ pl. BAC; AF $\perp$ pl. BAD; AG $\perp$ pl. CAD (Fig. 166.).

Thes. $\measuredangle$ EAF + $\measuredangle$ AB = 2R = $\measuredangle$ BAD + $\measuredangle$ AF x.

Bew. Es ist AEFG die Polarecke zu ABCD. Man nehme in der Kante AB einen beliebigen Punkt L, errichte LH $\perp$ pl. BAC und LK $\perp$ pl. BAD, so ist LH $\parallel$ AE und LK $\parallel$ AF (§. 280.); folglich auch 1) $\measuredangle$ HLK = EAF (§. 281.).

Legt man durch den $\measuredangle$ HLK eine Ebene, so schneidet diese die Seiten BAC und BAD der Ecke in LM und LN. Weil aber BL $\perp$ pl. HLK (§. 275.), so ist $\measuredangle$ MLN der Neigungswinkel der Ebenen BAC und BAD (§. 275. und §. 292, 2.); also 2) $\measuredangle$ MLN = $\measuredangle$ AB.

Verlängert man noch KL durch ihren Fußpunkt L, so hat man

$$\measuredangle\ NLP = HLM = R; \text{ also auch}$$

$$\measuredangle\ NLP - MLP = HLM - MLP, \text{ oder}$$

$$\measuredangle\ NLM = HLP; \text{ daher } 3)\ \measuredangle\ AB = HLP.$$

Da nun $\measuredangle$ HLK + HLP = 2R (§. 32.); so folgt

$$\measuredangle\ EAF + \measuredangle\ AB = 2R. \text{ — Ebenso erhält man:}$$

$$\measuredangle\ EAG + \measuredangle\ AC = 2R = FAG + \measuredangle\ AD.$$

Weil ferner die Kanten BA, CA und DA der Ordnung nach auf den Ebenen der Winkel EAF, EAG und FAG senkrecht stehen; so ergibt sich aus denselben Gründen wie oben

$$BAD + \measuredangle AF = BAC + \measuredangle AE = CAD + \measuredangle AG = 2R.$$

Zus. Jeder Körperwinkel ist also die Polarecke seiner Polarecke, die man auch wegen der im Lehrsatz ausgesprochenen Eigenschaft Ergänzungs- oder Supplementarecke nennt.

§. 310.

Lehrs. In jedem körperlichen Dreiecke ist die Summe je zweier Kantenwinkel größer als der dritte.

Thes. $\measuredangle$ ABC + CBD > ABD (Fig. 167.).

Bew. Man construire in dem Kantenwinkel ABD (welcher größer sein mag, als jeder der beiden andern) einen $\measuredangle$ ABE = ABC, nehme auf der Kante BC einen beliebigen Punkt F, mache BG = BF, und lege durch die Punkte F und G eine Ebene so, daß sie alle Seiten der Ecke schneidet, also das $\triangle$ FHK entsteht, dann ist $\triangle$ BHF $\cong$ BHG (I.); daher HF = HG.

In dem $\triangle$ FHK ist aber HF + FK > HK, oder

HF + FK > HG + GK; somit FK > GK.

Demnach ist in den Dreiecken BFK und BGK (nach §. 90, II.)

$$\measuredangle\ FBK > GBK; \text{ mithin, weil}$$

$$\underline{\measuredangle\ HBF = HBG,}$$

$$\measuredangle\ HBF + FBK > HBG + GBK, \text{ d. i.}$$

$$\measuredangle\ ABC + CBD > ABD.$$

Sind alle drei Kantenwinkel gleich, oder auch nur zwei, von denen jeder größer ist als der dritte, so ist die Richtigkeit der Behauptung an sich klar.

§. 311.

Lehrs. In jeder n-kantigen körperlichen Ecke ist I. die Summe aller Kantenwinkel kleiner als 4R; II. die Summe (S′) der Flächenwinkel kleiner als n.2R, und größer als (n — 2).2R.

Thes. $\begin{cases} \text{I. } \measuredangle BAC + CAD + DAE \ldots < 4R \text{ (Fig. 168.).} \\ \text{II. a) } S' < n.2R, \text{ und b) } S' > (n-2)2R. \end{cases}$

Bew. I. Man lege durch einen beliebigen Punkt B der Kante AB eine Ebene, welche durch alle Seiten der Ecke geht; so erhält man als Durchschnittsfigur das n Eck BCDEF..... Bezeichnet man die Summe aller Winkel dieses n-Eckes durch s, so ist $s = n.2R - 4R$ (§. 85.); daher

$$1)\ s + 4R = n.2R.$$

Ferner ist in den Dreiecken BAC, CAD, DAE u. s. f.

$$(\measuredangle ABC + ACB) + BAC = 2R,$$
$$(\measuredangle ACD + ADC) + CAD = 2R \text{ u. s. w.}$$

Addirt man alle diese Winkel der n Seitendreiecke, und setzt die Summe der eingeklammerten $= S$, so ist

$$2)\ S + BAC + CAD + DAE \ldots = n.2R;$$

mithin auch durch Comparation der Gleichungen 2) und 1):

$$3)\ S + BAC + CAD + DAE \ldots = s + 4R.$$

Weil aber $\measuredangle ABG$, ABC und CBG bei B ein körperliches Dreieck bilden, so ist $\measuredangle ABG + ABC > CBG$ (§. 310.).

Dasselbe ist bei allen übrigen Ecken C, D, E... der Fall. Es ist somit $\quad 4)\ S > s.$

Subtrahirt man endlich 4) von 3), so hat man

$$BAC + CAD + DAE \ldots < 4R.$$

II. Denkt man sich zur gegebenen die Ergänzungsecke construirt, und bezeichnet die Summe der Kantenwinkel der letztern durch s, so ist $S' + s = n.2R$ (§. 309.), folglich $S' < n.2R$.

Weil ferner $S' + s = n.2R$, aber $s < 4R$ (Nr. I.); so folgt $S' > n.2R - 4R$, oder $S' > (n-2)2R$.

Zus. 1. Jeder einzelne Kantenwinkel eines Trieders ist stets kleiner als 2R (§. 310.).

Zus. 2. Die Summe aller Winkel eines Trieders ist kleiner als 6R oder 540° und größer als 2R oder 180°.

§. 312.

Lehrs. Sind in zwei körperlichen Dreiecken I. die Kantenwinkel, einzeln genommen, einander gleich; so sind auch die ihnen gegenüberstehenden Flächenwinkel gleich, und II. umgekehrt.

Dat. $\measuredangle$ BAD = bad; BAC = bac; CAD = cad (Fig. 169.).

Thes. $\measuredangle$ AC = $\measuredangle$ ac; $\measuredangle$ AD = $\measuredangle$ ad; $\measuredangle$ AB = $\measuredangle$ ab.

Bew. I. Man nehme in der Kante AC beliebig den Punkt E, errichte in den Ebenen BAC und CAD auf AC die Senkrechten EF und EG, so ist $\measuredangle$ FEG = $\measuredangle$ AC. Ferner mache man ae = AE, errichte in den Seiten bac und cad auf ac in e die Lothe ef und eg, so ist $\measuredangle$ feg = $\measuredangle$ ac.

Nun ist $\triangle$ AEF $\cong$ aef (III.); daher AF = af, und EF = ef; ebenso $\triangle$ AEG $\cong$ aeg; folglich AG = ag, und EG = eg.

Zieht man noch FG und fg, so ist $\triangle$ FAG = fag (I.); also FG = fg.

Endlich hat man noch $\triangle$ FEG $\cong$ feg (II.); somit

$\measuredangle$ FEG = feg, oder $\measuredangle$ AC = $\measuredangle$ ac.

Ebenso ergeben sich die weitern Behauptungen.

II. Denkt man sich zu beiden Triëdern die Polarecken construirt, deren Kantenwinkel wir der Ordnung nach durch M, N, P und m, n, p bezeichnen wollen, so ist (§. 309.) $\measuredangle$ AC + M = 2R = $\measuredangle$ AD + N = $\measuredangle$ AB + P, ebenso $\measuredangle$ ac + m = 2R = $\measuredangle$ ad + n = $\measuredangle$ ab + p.

Da aber $\measuredangle$ AC = $\measuredangle$ ac, so ist auch M = m, ebenso N = n und P = p. Die Polarecken haben also die Kanten-, folglich auch (nach I.) die Flächenwinkel gleich, deren Supplemente somit wieder gleich sein müssen; diese sind aber die Kantenwinkel der gegebenen Triëder.

Zus. 1. Scheiteldreiecke haben alle Kanten-, also auch alle Flächenwinkel beziehungsweise gleich.

Zus. 2. Hat ein Triëder zwei gleiche Kantenwinkel; so sind auch die ihnen gegenüberstehenden Flächenwinkel gleich, und umgekehrt. Denn ist (Fig. 167.) $\measuredangle$ ABC = CBD, und man halbirt den $\measuredangle$ ABD durch die Gerade BE, und legt durch $\measuredangle$ CBE eine Ebene; so folgt $\measuredangle$ AB = $\measuredangle$ BD (nach Lehrs. I.). — Die Richtigkeit des umgekehrten Satzes ergibt sich mittelst der Polarecke (wie Lehrs. II.).

Zus. 3. Ein Triëder mit drei gleichen Kantenwinkeln hat auch drei gleiche Flächenwinkel, und umgekehrt.

§. 313.

Lehrs. In jedem Dreikant mit ungleichen Winkeln steht I. dem größern Flächenwinkel der größere Kantenwinkel gegenüber, und II. umgekehrt.

I. Dat. $\measuredangle BC > \measuredangle AB$. — Thes. $\measuredangle ABD > CBD$ (Fig. 167.).

Bew. Denkt man sich durch die Kante BC eine Ebene so gelegt, daß sie mit pl. ABC einen dem Winkel $\measuredangle AB$ gleichen Flächenwinkel macht, so fällt sie zwischen die Ebenen ABD und CBD, und schneidet pl. ABD in der Geraden BE, und es wird $\measuredangle CBE = ABE$ (§. 312, Zus. 2.). Nun ist

$$\measuredangle ABD = ABE + EBD, \text{ also auch}$$
$$= CBE + EBD. \text{ Es ist aber}$$
$$\measuredangle CBE + EBD > CBD \text{ (§. 310.); mithin auch}$$
$$\measuredangle ABD > CBD.$$

II. Dat. $\measuredangle ABD > CBD$. — Thes. $\measuredangle BC > \measuredangle AB$.

Bew. Wäre $\measuredangle BC = \measuredangle AB$; so müßte $\measuredangle ABD = CBD$ sein (§. 312, Zus. 2.). Wäre aber $\measuredangle BC < \measuredangle AB$, so wäre auch $\measuredangle ABD < CBD$ (I. Fall). Beides ist gegen die Voraussetzung; also ist $\measuredangle BC > \measuredangle AB$.

§. 314.

Lehrs. Haben zwei Trieder zwei Kantenwinkel und den von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkel beziehungsweise gleich, und folgen diese Stücke in beiden in derselben Ordnung aufeinander (sind gleichförmig gelegt); so sind die Trieder congruent.

Dat. $\measuredangle BAC = bac$; $CAD = cad$; $\measuredangle AC = \measuredangle ac$.
Thes. $ABCD \cong abcd$ (Fig. 169.).

Bew. Man bringe das Dreikant ABCD so in $\triangle abcd$, daß $\measuredangle CAB$ den $\measuredangle cab$ deckt, so muß, weil $\measuredangle AC = \measuredangle ac$ ist, pl. CAD auf cad, und die Kante AD auf ad fallen, da $\measuredangle CAD = cad$ ist. Da also AB und ab, dann AD und ad sich decken, so fallen auch die Ebenen BAD und bad zusammen (§. 272, Zus. 2.); beide Dreiecke sind somit congruent.

Zus. 1. Haben zwei Trieder zwei Kantenwinkel und den von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkel beziehungsweise gleich, folgen diese Stücke aber in umgekehrter Ordnung aufeinander (sind nicht gleichförmig gelegt); so haben sie zwar auch (§. 312.) alle

übrigen Stücke gleich, sind aber nicht congruent. Man nennt sie in diesem Falle symmetrisch oder gegenbildlich gleich.

Zus. 2. Vertikalecken sind stets symmetrisch gleich, und umgekehrt lassen sich symmetrische Ecken stets als Vertikalecken denken.

Zus. 3. Sind zwei Ecken congruent, so sind es auch ihre Polarecken; sind jene symmetrisch, so sind es auch diese.

Anm. Mit geringer Aenderung der Lehrsätze über die Congruenz der Dreiecke läßt sich auch darthun, daß zwei körperliche Dreiecke, welche 1) alle drei Kanten- oder Flächenwinkel, 2) einen Kanten- und zwei anliegende Flächenwinkel, 3) zwei Kanten- oder zwei Flächenwinkel und die dem größern von ihnen gegenüberliegenden Flächen- oder Kantenwinkel beziehungsweise gleich haben, — congruent oder symmetrisch gleich seien, je nachdem obige gleichen Stücke in derselben oder umgekehrter Ordnung aufeinander folgen.

b) Praktischer Satz.

§. 315.

Aufg. Ein körperliches Dreieck zu construiren, welches drei gegebene Winkel (als Kantenwinkel) enthält.

Aufl. Man verzeichne (Fig. 170.) die gegebenen Winkel (von denen je zwei größer als der dritte und alle drei $< 4R$ sein müssen) als anstoßende Centriwinkel BAC, CAD und DAE eines Kreises, mache arc. CF = BC und arc. DG = DE, ziehe dann BF und EG, errichte in ihrem Durchschnittspunkte H eine Senkrechte auf die Kreisfläche, lege durch diese Senkrechte und BF eine Ebene, beschreibe in ihr mit dem Radius KB aus K einen Bogen, der das Loth in M schneidet, und lege endlich durch C, A und M, ebenso durch D, A und M Ebenen, die sich in AM schneiden; so ist ACDM die gesuchte Ecke.

Bew. Die Linien BF und EG müssen sich schneiden. Denn da arc. BC = CF, und arc DG = DE, so ist $\measuredangle$ AKF = R = ALG (§. 219, Zus. 4.); ferner hat man

$$\measuredangle BAC + CAD + DAE < 4R \text{ (Hypoth.), und}$$
$$\measuredangle CAD < BAC + DAE; \text{ folglich}$$
$$2.\measuredangle CAD < 4R, \text{ somit}$$
$$\measuredangle CAD < 2R \text{ (§. 47.)}.$$

Zieht man noch KM und LM, so ist (nach §. 300, Zus. 1.) $\measuredangle$ AKM = R = AKB, daher $\triangle$ AKM $\cong$ AKB (I.); folglich auch

1) $\sphericalangle$ MAK = BAC; überdieß ist AM = AB = AE, mithin $\triangle$ AML $\cong$ AEL (IV.), und daher
2) $\sphericalangle$ MAL = EAD.

Zus. Auf die nämliche Art läßt sich auch ein körperliches Dreieck construiren, das mit einem gegebenen congruent ist.

II. Abschnitt. Von den geometrischen Körpern.

§. 316.

Erkl. 1. Unter geometrischem Körper versteht man jeden von allen Seiten begrenzten Theil des geometrischen Raumes.

2. Hinsichtlich der begrenzenden Flächen nennt man einen Körper a) ebenflächig, wenn er von lauter Ebenen, b) krummflächig, wenn er von lauter oder einer einzigen krummen, c) gemischtflächig, wenn er von ebenen und krummen Flächen eingeschlossen ist.

3. Die Summe aller Begrenzungsflächen eines Körpers heißt seine Oberfläche; die Quantität des Körpers, d. i. der von der Oberfläche umschlossene Raum, das Volumen oder der körperliche Inhalt desselben.

4. Denkt man sich alle Grenzflächen eines Körpers zusammenhängend in einer Ebene verzeichnet, so heißt die so erhaltene Figur das Netz des Körpers.

Zus. Zur Begrenzung eines ebenflächigen Körpers sind wenigstens vier Ebenen nothwendig (§. 307, Zus.).

§. 317.

Erkl. 1. Jeder ebenflächige Körper wird überhaupt ein Polyeder genannt. Die Durchschnitte je zweier Begrenzungsebenen heißen Kanten, und die von drei oder mehrern jener Ebenen eingeschlossenen Körperwinkel Ecken des Polyeders.

2. Ein Polyeder heißt regulär, wenn es von lauter regulären und congruenten Figuren begrenzt ist, welche congruente Ecken einschließen; außerdem ist es irregulär.

3. Es gibt nur folgende fünf reguläre Polyeder, welche auch platonische Körper genannt werden:

a) das Tetraëder, welches von vier, b) das Oktaëder, das von acht, c) das Ikosaëder, welches von zwanzig gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen ist; d) das Hexaëder, Kubus oder Würfel, begrenzt von sechs Quadraten; und e) das Dodekaëder, dessen Grenzflächen zwölf reguläre Fünfecke sind.

Daß es nicht mehr als die ebengenannten regulären Polyeder geben kann, folgt mittelst §. 85, Zus. 1. und (mit Rücksicht auf §. 307, Zus.) aus §. 311.

§. 318.

Erkl. Werden Körper aufeinander bezogen, so nennt man sie

1) gleich, wenn sie gleiche Quantität oder Volumina,

2) ähnlich, wenn sie von gleich vielen der Ordnung nach ähnlichen, congruente Körperwinkel einschließenden Flächen begrenzt sind, also vollkommen gleiche Form haben,

3) congruent, wenn sie bei gehöriger Lage so ineinander passen, daß alle ihre Grenzflächen sich decken, also die Körper in derselben Ordnung von gleichvielen congruenten Flächen begrenzt sind, welche lauter congruente Ecken bilden,

4) symmetrisch gleich, oder kurz symmetrisch (bezeichnet durch „$\cong$"), wenn alle Grenzflächen und Ecken congruent sind, aber die beziehungsweise congruenten Stücke in umgekehrter Ordnung aufeinander folgen.

§. 319.

Erkl. 1. Die Elementargeometrie behandelt folgende fünf Hauptkörper: das Prisma und die Pyramide als ebenflächige, den Cylinder und Kegel als gemischtflächige, und die Kugel als krummflächigen Körper.

2. Wir bringen diese Körper in drei Klassen, und betrachten

I. prismatische Körper, wohin das Prisma und der Cylinder,

II. pyramidale, wozu die Pyramide und der Kegel gehören,

III. die Kugel oder den sphärischen Körper.

I. Kap. Von den prismatischen Körpern.

§. 320.

Erkl. 1. Ein Prisma (Ecksäule) ist jener Körper, welcher begrenzt ist von zwei ebenen, geradlinigen, parallelen und con-

gruenten Figuren und ebenso vielen Parallelogrammen, als jede von jenen Figuren Seiten hat (Fig. 171.).

Ein Prisma kann man sich dadurch entstehend denken, daß eine geradlinige Figur sich im Raume so bewegt, daß sie zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, und ihre Ecken gerade Linien beschreiben.

2. Die beiden congruenten Figuren heißen die Grundflächen, die Parallelogramme Seitenflächen, und der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen die Höhe des Prisma.

Bei Prismen und allen Körpern mit parallelen Grundflächen nennt man gewöhnlich jene, auf der man sich den Körper stehend denkt, kurz Grundfläche oder Basis, die andere obere Grundfläche oder Deckelfläche.

3. Die Kanten eines Prisma werden Grund= oder Seitenkanten genannt, je nachdem sie die Durchschnitte einer Grund= und einer Seitenfläche oder zweier Seitenflächen sind.

4. Jedes Prisma heißt ebenso viel=seitig oder =kantig, als eine seiner Grundflächen Seiten hat.

5. Ein Prisma heißt senkrecht oder gerade, wenn seine Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht stehen, außerdem schief; ein gerades Prisma, dessen Grundflächen reguläre Vielecke sind, wird gleichseitig, und die ihre Polygonsmittelpunkte verbindende Gerade dessen Achse genannt.

6. Jeder ebene Schnitt eines Prisma durch zwei gegenüberstehende Seitenkanten heißt ein Diagonalschnitt.

7. Wird ein Prisma durch eine Ebene nicht parallel zur Grundfläche abgeschnitten, so heißt jeder der hiedurch entstehenden zwei Körper ein Prismoid (schief abgekürztes Prisma).

Zus. 1. Alle Seitenkanten eines Prisma sind parallel und gleich (§. 280, Zus. und §. 296, Zus. 1.).

Zus. 2. Alle Seitenkanten haben gegen die Grundflächen gleiche Neigung (§. 286.); steht daher nur eine auf den Grundflächen senkrecht, so stehen alle darauf senkrecht (§. 279.), folglich auch alle Seitenflächen (§. 300.).

Zus. 3. Bei dem geraden Prisma ist jede Seitenkante der Höhe gleich (§. 296, Zus. 2.).

Zus. 4. Jeder Diagonalschnitt eines Prisma ist ein Paralle=

logramm (Zus. 1. und §. 99, II.); jedes mehrseitige Prisma läßt sich somit durch Diagonalebenen in lauter dreiseitige zerlegen.

Zus. 5. Prismen zwischen parallelen Ebenen haben gleiche Höhen (§. 296, Zus. 2.).

§. 321.

Erkl. 1. Ein vierseitiges Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind (das also von sechs Parallelogrammen begrenzt ist), heißt ein Parallelepiped (Fig. 173.).

2. Ein gerades Parallelepiped, dessen Grundflächen Rechtecke sind, wird rechtwinklig, und ein rechtwinkliges, dessen sämmtliche Kanten gleich sind, Kubus oder Würfel genannt. Ein von sechs congruenten Rhomben begrenztes Parallelepiped nennt man Rhomboëder.

3. Ein schiefes Parallelepiped heißt a) einfach schief, wenn nur ein Paar gegenüberstehender Seitenflächen, b) doppelt schief, wenn alle Seitenflächen auf der Grundfläche schief stehen.

§. 322.

Erkl. 1. Ein Cylinder oder eine Walze ist ein Körper, welcher begrenzt ist von zwei parallelen und gleichen Kreisen und einer durch ihre Peripherien gelegten krummen Fläche, die von jeder durch die Mittelpunkte jener Kreise gelegten Ebene in zwei geraden Linien geschnitten wird (Fig. 172.).

Der Cylinder ist nichts anderes, als ein unendlichvielseitiges Prisma (§. 243, Zus. 3.); er entsteht wie dieses durch die Bewegung eines Kreises, dessen Mittelpunkt eine gerade Linie beschreibt.

2. Die beiden Kreise werden Grundflächen oder Grundkreise, die andere Fläche die Seiten- oder Mantelfläche oder kurz der Mantel des Cylinders genannt. Die gerade Linie, welche die Mittelpunkte der beiden Grundkreise verbindet, heißt Achse, der Abstand der beiden Grundkreise die Höhe, und die Durchschnittslinien des Mantels mit einer durch die Achse gehenden Ebene Seitenlinien oder Seiten des Cylinders.

3. Ein Cylinder heißt gerade oder senkrecht, wenn die Achse auf den Grundkreisen senkrecht steht, außerdem schief. Ist

die Achse eines geraden Cylinders dem Diameter der Grundfläche gleich, dann wird er gleichseitig genannt.

Einen geraden Cylinder kann man sich entstehend denken durch die vollständige Umdrehung eines Rechteckes um eine seiner Seiten.

4. Ein durch die Achse gehender ebener Schnitt eines Cylinders heißt ein Achsenschnitt.

5. Denkt man sich aus einem Cylinder einen andern mit derselben Achse, aber kleinerm Radius der Grundkreise herausgenommen, so heißt der übrig bleibende Theil ein Hohlcylinder oder eine cylindrische Röhre; die Differenz beider Radien ihre Dicke, der innere Diameter auch ihre Weite (im Lichten).

Zus. 1. Alle Seitenlinien eines Cylinders sind der Achse, also auch unter sich parallel und gleich (§. 21, Zuss., u. §. 99, II.).

Zus. 2. Die Achse und alle Seiten eines Cylinders haben gegen die Grundflächen gleiche Neigung (§. 286.); ist daher die erstere auf der Basis senkrecht, so sind es auch die letztern.

Zus. 3. Beim geraden Cylinder ist die Achse und jede Seite der Höhe gleich (§. 296, Zus. 2.).

Zus. 4. Jeder Achsenschnitt eines Cylinders ist ein Parallelogramm; daher Achsenparallelogramm genannt.

§. 323.

Lehrs. Haben zwei Prismen congruente Grundflächen und ein paar gleichliegende congruente Seitenflächen, welche gegen die Grundflächen einerlei Neigung haben; so sind sie congruent.

Bew. Denkt man sich das eine Prisma so in das andere gestellt, daß die congruenten Grundflächen sich decken, so müssen wegen der Gleichheit der Neigungswinkel auch die beiden gleichliegenden congruenten Seitenflächen sich decken, ferner alle Seitenkanten, sowie die Kanten der Deckelfläche, also auch die durch sie gelegten Ebenen aufeinanderfallen; mithin decken sich alle Grenzflächen, die Prismen sind daher congruent.

Zus. 1. Gerade Prismen sind congruent, wenn sie congruente Grundflächen und gleiche Höhe; gleichseitige, wenn sie eine Grund- und eine Seitenkante; rechtwinklige Parallelepipede, wenn sie drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten; Würfel, wenn sie eine Seite gleich haben.

Zus. 2. Sind unter den Bedingungen des Lehrsatzes die homologen Flächen nicht gleichförmig gelegt, so haben die Prismen zwar alle Seitenflächen, Ecken u. s. w. congruent, können aber nicht zum Decken gebracht werden, sind daher nur symmetrisch.

Zus. 3. Cylinder sind congruent, wenn ihre Grundkreise und Achsen gleich sind, und letztere gegen erstere gleiche Neigung haben.

§. 324.

Lehrs. Wird ein Prisma parallel zur Basis geschnitten; so ist die Durchschnittsfigur der Grundfläche congruent.

Dat. pl. LMNPQ ⫲ ABCDE (Fig. 171.).

Thes. LMNPQ ≅ ABCDE.

Bew. Da AL ⫲ BM, und LM ⫲ AB (§. 296.), so ist auch LM = AB (§. 98, Zus. 2.). Ebenso ergibt sich MN = BC, NP = CD u. s. f.

Wegen LM ⫲ AB und MN ⫲ BC ist ∡ LMN = ABC (§. 281.); ebenso folgt ∡ MNP = BCD u. s. w.

Es ist daher LMNPQ ≅ ABCDE (§. 88, 1.).

Zus. 1. Jeder zur Grundfläche parallele Schnitt eines Cylinders ist also ein derselben gleicher Kreis.

Zus. 2. Theilt man eine Seitenkante oder die Höhe eines Prisma in lauter gleiche Theile, und legt durch die Theilungspunkte Ebenen parallel zur Grundfläche; so wird dasselbe in ebenso viele congruente Prismen getheilt, als die Anzahl jener Theile beträgt. Denn angenommen, es sei AL = LF, so ist, da auch AE = LQ und ∡ EAL = QLF ist, AQ ≅ LK (§. 102.); ferner ∡ AE = ∡ LQ (§. 302.) und ABCDE ≅ LMNPQ (Lehrs.); somit das Prisma AN ≅ LH (§. 323.).

§. 325.

Lehrs. Wird ein Prisma parallel zur Basis geschnitten; so verhält sich jedes abgeschnittene Stück zum ganzen Prisma, wie der zugehörige Theil einer Seitenkante zu dieser ganzen Kante.

Dat. LMNPQ ⫲ ABCDE (Fig. 171.).

Thes. EN ÷ EH = AL ÷ AF.

Bew. Denkt man sich ein beliebiges Maß α, das sich auf AL genau m, und auf AF etwa n mal auftragen läßt, so ist offenbar AL = mα und AF = nα, und daher

1) $AL \div AF = m\alpha \div n\alpha = m \div n$.

Legt man ferner durch alle Theilungspunkte, die man in AL und AF durch Auftragen des Maßes α erhalten, Ebenen parallel zu ABCDE, so erhält man so viele congruente Prismen, als AF Theile hat, (§. 324, Zus. 2.), und es wird, wenn wir eines derselben durch p bezeichnen, $EN = m.p$ und $EH = n.p$ sein; daher ist

2) $EN \div EH = mp \div np = m \div n$.

Comparirt man die Proportionen 1) und 2), so folgt

$EN \div EH = AL \div AF$. — Ebenso ergibt sich

$HQ \div EH = LF \div AF$.

Zus. 1. Die Stücke eines parallel zur Basis geschnittenen Prisma verhalten sich wie die zugehörigen Theile einer Seitenkante.

Zus. 2. Jedes Stück eines parallel zur Basis abgeschnittenen Prisma verhält sich zum ganzen Prisma, wie seine Höhe zur Höhe des ganzen (Lehrs. und §. 299.).

§. 326.

Lehrs. In jedem Parallelepiped sind die gegenüberstehenden Seitenflächen parallel und congruent.

Dat. Prlgr. EG ╫ AC, und EG ≅ AC (Fig. 173.).

Thes. BG ╫ AH, und BG ≅ AH.

Bew. Es ist BE ein Parallelogramm, daher BF ╫ AE, ebenso BC ╫ AD; mithin pl. BG ╫ AH (§. 295.).
Ferner ist BF = AE, BC = AD und ∡ FBC = EAD (§. 281.); folglich BG ≅ AH (§. 102.). Dasselbe gilt für AF und DG.

Zus. Beim Parallelepiped kann man also jedes Paar gegenüberstehender Grenzflächen als Grundflächen betrachten.

§. 327.

Lehrs. Jedes Parallelepiped wird durch einen Diagonalschnitt halbirt.

Dat. Prlgr. EG ╫ AC, und EG ≅ AC (Fig. 173.).

Thes. $BCDG = ABDE = \frac{1}{2} ACGE$.

Bew. Es ist △ BCD ≅ FGH, ebenso △ ABD ≅ EFH (I.); somit BCDG und ABDE dreiseitige Prismen.

Legt man nun durch einen beliebigen Punkt K der Kante BC eine das Prisma durchschneidende Ebene KM ⊥ BC, so stehen auf

ihr auch FG und EH senkrecht (§. 279.); ferner ist KL $\#$ MN und KN $\#$ LM (§. 296.), somit KM ein Parallelogramm; also $\measuredangle$ LKN = LMN. Da aber $\measuredangle$ BKL = R = BKN (Constr.), so ist $\measuredangle$ LKN = $\measuredangle$ BC, ebenso, wegen $\measuredangle$ EML = R = EMN, ist $\measuredangle$ LMN = $\measuredangle$ EH; daher $\measuredangle$ BC = $\measuredangle$ EH, überdieß hat man $\triangle$ EFH $\cong$ BCD $\cong$ FGH, und BG $\cong$ AH (§. 326.); somit die Prismen BCDG und ABDE symmetrisch gleich; also

$$BCDG = ABDE = \tfrac{1}{2}\,ACGE.$$

Zus. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich betrachten als die Hälfte eines Parallelepipeds, das mit ihm gleiche Höhe, aber eine doppelt so große Grundfläche hat.

§. 328.

Lehrs. Jedes schiefe Parallelepiped ist einem geraden gleich, das mit ihm einerlei Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Dat. pl. EG und JL liegen in einer Ebene; AE $\perp$ pl. AC.
Thes. AL = AG (Fig. 174.).

Bew. Erweitert man die Seitenflächen BG und AH, bis sie die gleichfalls erweiterten Seitenflächen AK und DL des Prisma AL, welches doppelt schief sein mag, schneiden; so erhält man ein einfach schiefes Parallelepiped AP (§. 296.), das mit den vorigen gleiche Höhe hat. — Nun ist $\triangle$ EAN $\cong$ FBO (I.), dann $\triangle$ EAN $\#$ FBO (§. 295.); also EANOBF ein dreiseitiges Prisma. Dasselbe ergibt sich auf gleiche Art für HDQPCG. —

Weil ferner $\triangle$ HDQ $\cong$ EAN (I.), Prlgr. DG $\cong$ AF (§. 326.), und $\measuredangle$ DH = $\measuredangle$ AE (§. 302.); so ist HDCQ = EABN (§. 323.), also auch Prisma

$$EABCDP - HDCQ = EABCDP - EABN,\ \text{d. i.}$$
$$\text{Prlpd. } AG = AP. \quad \text{— Ebenso ergibt sich}$$
$$AP = AL;\ \text{somit ist auch}$$
$$\overline{AG = AL.}$$

Zus. 1. Jedes schiefe Parallelepiped läßt sich also in ein gerades verwandeln, das dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Zus. 2. Alle Parallelepipede mit einerlei Grundfläche und gleichen Höhen sind einander gleich.

Zus. 3. Alle dreiseitigen Prismen mit einerlei Grundfläche und gleichen Höhen sind gleich (§. 327, Zus. und Zus. 2.).

Zus. 4. Alle Prismen mit einerlei Grundfläche und gleichen Höhen sind gleich; denn sie lassen sich durch gleichliegende Diagonalflächen in dreiseitige zerlegen, die der Ordnung nach gleich sind (Zus. 3. und §. 103.).

Zus. 5. Alle Cylinder mit einerlei oder gleichen Grundkreisen und Höhen sind gleich (Zus. 4. und §. 322, 1.).

§. 329.

Lehrs. Jedes Parallelepiped (P) ist einem rechtwinkligen gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe, und eine Kante der Basis gemeinschaftlich hat.

Dat. Prlgr. BK = AC; $\measuredangle$ DAB = R; AE $\perp$ pl. AC.

Thes. P = AG (Fig. 175.).

Bew. Legt man durch die Winkel EAK und FBL Ebenen, welche pl. DG und EG oder ihre Erweiterungen schneiden, so entsteht über BK das gerade Parallelepiped BN, das mit P gleiche Höhe hat; also ist 1) BN = P (§. 328.).

Betrachtet man ferner AF als gemeinsame Grundfläche der Parallelepipede AG und AM, so hat man, da pl. KG $\#$ AF ist,

2) BN = AG (§. 328.);

mithin auch durch Comparation der Gleichungen 1) und 2)

P = AG.

§. 330.

Lehrs. Rechtwinklige Parallelepipede von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Dat. $\measuredangle$ ABC = R = KBM; AE = KN (Fig. 176.).

Thes. AG $\div$ BP = AC $\div$ BL.

Bew. Stellt man beide Parallelepipede auf einer Ebene DL so nebeneinander, daß sie den Punkt B gemeinschaftlich haben und BK auf die Verlängerung von BC fällt, so fällt auch BM auf die verlängerte AB, da $\measuredangle$ ABK = R = KBM ist (§. 33.); ferner erhalten beide BF gemeinsam (§. 276. und Dat.); daher fällt auch pl. FH mit FP in eine Ebene. Erweitert man nun noch die Seitenflächen MP und DG, bis sie sich und die erweiterte Grundfläche EG schneiden, so entsteht das rechtwinklige Parallelepiped BR. Da nun pl. BG $\#$ AH $\#$ MR, und BQ $\#$ KP $\#$ CR, so ist

$AG \div BR = AB \div BM$ (§. 325, Zus. 1.), ebenso
$BR \div BP = BC \div BK$; somit

$AG \div BP = AB.BC \div BM.BK$. Es ist aber auch
$AC \div BL = AB.BC \div BM.BK$ (§. 166, Zus.); daher

$AG \div BP = AC \div BL$.

Zus. 1. Alle Parallelepipede von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen (§. 329.). — Dasselbe gilt von allen dreiseitigen Prismen (§. 327, Zus.).

Zus. 2. Rechtwinklige Parallelepipede von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich. Denn setzt man in der Proportion des Lehrs. $AC = BL$, so folgt $AG = BP$.

Zus. 3. Alle Parallelepipeda mit gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich (§. 329, und Zus. 2.).

Zus. 4. Alle dreiseitigen Prismen mit gleicher Basis und Höhe sind gleich (§. 327. Zus. und Zus. 3.).

§. 331.

Lehrs. Jedes Prisma (P), welches mit einem dreiseitigen (p) gleiche Höhe hat, verhält sich zu diesem, wie seine Grundfläche (B) zu der des dreiseitigen (b).

Thes. $P \div p = B \div b$.

Bew. Denkt man sich das gegebene mehrseitige Prisma durch Diagonalschnitte in dreiseitige zerlegt, und bezeichnet diese der Ordnung nach durch L, M, N . . . ., ihre Grundflächen durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots$; so ist $L + M + N \ldots = P$, und $\alpha + \beta + \gamma \ldots = B$; ferner hat man, da alle mit dem gegebenen dreiseitigen Prisma gleiche Höhe haben:

$L \div p = \alpha \div b$ (§. 330, Zus. 1.), ebenso
$M \div p = \beta \div b$, dann
$N \div p = \gamma \div b$, u. s. w.; daher (Ar. §. 261, Zus. 2.),

$(L + M + N \ldots) \div p = (\alpha + \beta + \gamma \ldots) \div b$, d. i.
$P \div p = B \div b$.

Zus. 1. Jedes vielseitige Prisma ist einem dreikantigen gleich, wenn beide gleiche Grundfläche und Höhe haben; denn wird in obiger Proportion $B = b$, so ist auch $P = p$.

Zus. 2. Alle Prismen mit gleicher Basis und Höhe sind einander gleich (Zus. 1. und §. 330, Zus. 4.).

Zus. 3. Jeder Cylinder ist einem Prisma gleich, das mit ihm gleiche Basis und Höhe hat (Zus. 2.).

§. 332.

Lehrs. Alle Prismen (P, p) mit gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen (H, h).

Thes. $P \div p = H \div h$.

Bew. Nimmt man (Fig. 171.) auf der Höhe $AF = H$ des Prisma $AH = P$ ein Stück $AL = h$, und legt durch L eine Ebene parallel pl. AC, so ist Prisma $AN = p$ (§. 331, Zus. 2.).

Ferner ist $AH \div AN = AF \div AL$ (§. 325, Zus. 2.), d. i.

$$P \div p = H \div h.$$

Zus. Alle Cylinder mit gleichen Grundkreisen verhalten sich wie ihre Höhen.

§. 333.

Lehrs. Alle Prismen (P, p) mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Thes. $P \div p = B \div b$.

Bew. Man denke sich zwei dreiseitige Prismen M und N, welche mit den gegebenen gleiche Höhe haben, deren Grundflächen aber gleich B und b sind; so ist

$M \div N = B \div b$ (§. 330, Zus. 1.), oder

$P \div p = B \div b$ (§. 331, Zus. 1.).

Zus. Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser ihrer Grundflächen (§. 256, Zus. 4.).

§. 334.

Lehrs. Prismen (P, p) überhaupt verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen (B, b) und Höhen (H, h).

Thes. $P \div p = BH \div bh$.

Bew. Denkt man sich ein Hilfsprisma π, dessen Grundfläche B und Höhe h ist, so hat man

$P \div \pi = H \div h$ (§. 332.), dann

$\pi \div p = B \div b$ (§. 333.); also

$P \div p = BH \div bh$.

Zus. 1. Alle Cylinder verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundkreisen und Höhen.

Zus. 2. Rechtwinklige Parallelepipede verhalten sich wie die Produkte aus ihren Längen, Breiten und Höhen (§. 166, Zus.).

§. 335.

Lehrs. Aehnliche Prismen (P, p) verhalten sich wie die Kuben gleichliegender Seiten (S, s) oder auch ihrer Höhen.

Dat. $P \sim p$. — Thes. $P \div p = S^3 \div s^3$.

Bew. Bezeichnen B und b die Grundflächen, H und h die Höhen beider Prismen, so hat man, da $P \sim p$ ist:

$$B \div b = S^2 \div s^2 \text{ (§. 168.), und}$$
$$H \div h = S \div s\text{; daher}$$
$$BH \div bh = S^3 \div s^3\text{. Es ist aber auch}$$
$$P \div p = BH \div bh \text{ (§. 334.); mithin}$$
$$P \div p = S^3 \div s^3.$$

Zus. 1. Aehnliche Cylinder verhalten sich wie die Würfel der Radien oder Diameter ihrer Grundkreise, oder auch ihrer Achsen.

Zus. 2. Gleichliegende Seiten oder Linien ähnlicher Prismen und Cylinder verhalten sich wie die Kubikwurzeln aus den Zahlen, welche ihre Körperinhalte ausdrücken.

II. Kap. Von den pyramidalen Körpern.

§. 336.

Erkl. 1. Eine Pyramide (Spitzsäule) ist jener Körper, welcher begrenzt wird von irgend einer geradlinigen Figur und den durch ihre sämmtlichen Seiten gelegten Dreiecken, die alle in einem Punkte zusammenstoßen (Fig. 168.).

Eine Pyramide entsteht, wenn man einen Körperwinkel mit einer Ebene schneidet, so daß der Schnitt durch alle Kanten geht; oder, wenn man aus allen Ecken eines Polygons nach einem außerhalb desselben liegenden Punkte Gerade zieht, und durch je zwei aufeinanderfolgende derselben Ebenen legt.

2. Jene beliebige Figur wird Grundfläche oder Basis, die übrigen begrenzenden Dreiecke Seitenflächen oder Seitendreiecke, der Punkt, in dem alle diese zusammenstoßen, der Scheitel, Gipfel oder die Spitze, und die senkrechte Entfernung der Spitze von der Basis die Höhe der Pyramide genannt.

3. Die Kanten einer Pyramide nennt man (wie beim Prisma)

Grund= oder Seitenkanten, je nachdem sie der Basis und einem Seitendreiecke, oder zwei Seitenflächen angehören.

4. Eine Pyramide wird soviel=seitig oder =kantig genannt, als ihre Grundfläche Seiten hat.

5. Eine Pyramide, deren Seitenkanten einander gleich sind, heißt senkrecht oder gerade, außerdem schief. Ist die Basis einer geraden Pyramide ein reguläres Polygon, so wird sie gleichseitig, und, wenn alle Kanten einander gleich sind, regulär genannt.

Zus. 1. Um die Basis jeder geraden Pyramide läßt sich ein Kreis beschreiben, durch dessen Mittelpunkt die Höhe geht (§. 277, Zus. 1.).

Zus. 2. Es kann nicht mehr als drei reguläre Pyramiden geben (§. 92, Zus. 1. und §. 311.); eine davon ist das Tetraëder.

Zus. 3. Bei der dreiseitigen Pyramide kann jede der Grenzflächen als Basis angesehen werden.

§. 337.

Erkl. 1. Ein ebener Schnitt einer Pyramide, welcher durch die Spitze derselben und eine Diagonale der Grundfläche geführt wird, heißt ein Diagonalschnitt.

2. Wird eine Pyramide von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten, so heißt der zwischen jener Ebene und der Basis liegende Theil der Pyramide eine abgekürzte, abgestutzte Pyramide oder ein Pyramidenstumpf. Der senkrechte Abstand beider Parallelebenen wird ihre Höhe genannt.

Die Pyramide, welche eine abgekürzte zur vollständigen Pyramide macht, heißt deren Ergänzungspyramide.

3. Die Vereinigung zweier Pyramiden mit congruenten Grundflächen in der Art, daß diese sich decken, die Spitzen aber auf verschiedenen Seiten der Basis liegen, nennt man eine Doppelpyramide.

Zus. Die Durchschnittsfigur eines jeden Diagonalschnittes einer Pyramide ist ein Dreieck (Diagonaldreieck). Jede Pyramide läßt sich also durch Diagonalschnitte in lauter dreiseitige zerlegen.

§. 338.

Erkl. 1. Ein Kegel (Conus) ist jener Körper, welcher eingeschlossen ist von einem Kreise und einer krummen Fläche, welche durch die Peripherie dieses Kreises und einen außerhalb desselben

liegenden Punkt so gelegt ist, daß jede gerade Linie, welche von diesem Punkte an die Peripherie des Kreises gezogen wird, ganz in jener krummen Fläche liegt (Fig. 182.).

Der Kegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, und entsteht dadurch, daß eine gerade Linie von einem festen Punkte außerhalb eines Kreises an dessen Peripherie ganz herumgeführt wird.

2. Der einen Kegel begrenzende Kreis wird Grundfläche oder Grundkreis, die andere (krumme) Fläche die Seitenfläche oder der Mantel, und jener Punkt der Scheitel, Gipfel oder die Spitze des Kegels genannt.

3. Jede Gerade von der Spitze an einen Punkt der Peripherie des Grundkreises heißt eine Seitenlinie oder Seite, die Gerade von der Spitze an den Mittelpunkt des Grundkreises die Achse, und der senkrechte Abstand des Scheitels vom Grundkreise die Höhe.

4. Steht die Achse eines Kegels auf dem Grundkreise senkrecht, so nennt man ihn selbst senkrecht, gerade oder normal, sonst schief. Ein gerader Kegel heißt ferner gleichseitig, wenn seine Seite dem Diameter; rechtwinklig, wenn seine Achse dem Radius des Grundkreises gleich ist.

Zus. Alle Seiten eines geraden Kegels sind einander gleich (§. 277.); man nennt ihn deßhalb auch gleichschenklig.

Ein gerader Kegel entsteht durch die vollständige Umdrehung eines rechtwinkligen Dreieckes um eine seiner Katheten.

§. 339.

Erkl. 1. Jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet einen Kegel in einem Dreiecke, das Achsenschnitt oder Achsendreieck genannt wird.

2. Wird ein Kegel parallel zur Basis durch eine Ebene geschnitten, so heißt der zwischen beiden Parallelebenen enthaltene Theil des Kegels ein abgekürzter Kegel oder Kegeltrunkus, das oben abgeschnittene Stück aber der Ergänzungskegel.

Die Entfernung der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels nennt man seine Höhe. — Doppelkegel wie §. 337, 3.

§. 340.

Lehrs. Haben zwei Pyramiden die Grundflächen und ein paar homologe Seitenflächen congruent, und die letztern sind gegen die erstern nach einerlei Richtung gleich geneigt; so sind sie congruent.

Bew. Denkt man sich beide Pyramiden so ineinander gestellt, daß die congruenten Grundflächen sich decken, so müssen auch wegen der Gleichheit der Neigungswinkel die beiden congruenten Seitenflächen, also auch die Spitzen beider Pyramiden, sowie alle Kanten und Seitenflächen sich decken.

Zus. 1. Sind unter den Bedingungen des Lehrs. die entsprechenden Flächen nicht gleichförmig gelegt, dann sind die Pyramiden symmetrisch (lassen sich als Doppelpyramide zusammenstellen).

Zus. 2. Kegel sind congruent, wenn sie gleiche Grundkreise und gleiche Achsen haben, welche gegen jene gleich geneigt sind.

§. 341.

Lehrs. Wird eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Basis geschnitten, so ist I. die Durchschnittsfigur der Grundfläche ähnlich, II. beide verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Dat. $FH \nparallel BD$, und $AM \perp$ pl. BD (Fig. 177.).

Thes. I. $FH \sim BD$. — II. $FH \div BD = \overline{AL}^2 \div \overline{AM}^2$.

Bew. I. Es ist $FG \nparallel BC$, $GH \nparallel CD$, $HK \nparallel DE$ u. s. f. (§. 296.), daher $\angle FGH = BCD$, $\angle GHK = CDE$ 2c. (§. 281.).

Ferner ist $FG \div BC = AG \div AC$ (§. 140, II.), ebenso

$GH \div CD = AG \div AC$; daher auch

$FG \div BC = GH \div CD$. — Ebenso ergibt sich

$GH \div CD = HK \div DE$ u. s. f.; also ist

$FH \sim BD$ (§. 145, 2.).

II. Weil $AM \perp$ pl. BD (Dat.), so ist auch $AL \perp$ pl. FH (§. 297.), ferner schneidet die durch $\angle BAM$ gelegte Ebene die beiden Parallelebenen in $FL \nparallel BM$, und es ist

$AL \div AM = AF \div AB$, ebenso

$FG \div BC = AF \div AB$ (§. 140.), daher

$AL \div AM = FG \div BC$; also auch

$\overline{AL}^2 \div \overline{AM}^2 = \overline{FG}^2 \div \overline{BC}^2$. Es ist aber auch

$FH \div BD = \overline{FG}^2 \div \overline{BC}^2$ (§. 168.); somit

$FH \div BD = \overline{AL}^2 \div \overline{AM}^2$.

Zus. 1. Jeder zur Grundfläche parallele Schnitt eines Kegels ist ein Kreis.

Zus. 2. Werden zwei Pyramiden mit gleichen Grundflächen (b) und Höhen (h) in gleicher Entfernung vom Gipfel (x) parallel zu den Grundflächen geschnitten; so sind die Durchschnittsfiguren (f und f_1) einander gleich. Denn es ist

$$f \div b = h^2 \div x^2, \text{ ebenso } f_1 \div b = h^2 \div x^2; \text{ daher } f = f_1.$$

§. 342.

Lehrs. Wird eine Pyramide parallel zur Basis geschnitten, so ist die abgeschnittene der ganzen Pyramide ähnlich.

Dat. FH ‡ BD. — Thes. AFH ∾ ABD (Fig. 177.).

Bew. Es ist FH ∾ BD (§. 341.), ebenso △ AFG ∾ ABC, △ AGH ∾ ACD u. s. w. (§. 146.); da ferner ∡ AGF = ACB und AGH = ACD (§. 45, III.), dann ∡ AG = ∡ AC, so ist auch der Körperwinkel G ≅ C (§. 314.). Dasselbe gilt von allen übrigen Ecken; daher AFGHK ∾ ABCDE (§. 318, 2.).

§. 343.

Lehrs. Eine abgekürzte Pyramide kommt einem Prisma mit der nämlichen Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner ihre Höhe ist.

Bew. Ergänzt man (Fig. 177.) den Trunkus CKGE zur ganzen Pyramide ABD, und zieht AM ⊥ pl. BD, so ist AL die Höhe der abgeschnittenen, LM die der abgekürzten Pyramide. Da nun FH ∾ BD (§. 341.), so ist

$FH \div BD = \overline{FG}^2 \div \overline{BC}^2 = \overline{GH}^2 \div \overline{CD}^2$ u. s. f., ferner

$FH \div BD = \overline{AL}^2 \div \overline{AM}^2$ (§, 341, II.), somit

$\overline{AL}^2 \div \overline{AM}^2 = \overline{FG}^2 \div \overline{BC}^2 = \overline{GH}^2 \div \overline{CD}^2$ ꝛc.; also auch

$AL \div AM = FG \div BC = GH \div CD$ . . . . .

Je größer nun AL wird, je mehr also LM abnimmt, desto näher wird $AL \div AM = 1 \div 1$, desto mehr nähern sich also auch FG und BC, GH und CD u. s. w. der Gleichheit, ebenso die Grundflächen FH und BD. Die Grundflächen kommen also der Congruenz (§. 145, Zus. 3.), die Seitentrapeze Parallelogrammen (§. 99, II.) immer näher; somit der Pyramidenstumpf selbst einem Prisma mit derselben Basis und Höhe.

Zus. 1. Ein Pyramidenstumpf, dessen Höhe unendlich klein ist, gleicht einem Prisma von derselben Grundfläche und Höhe.

Zus. 2. Ein abgekürzter Kegel kommt einem Cylinder von der nämlichen Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner seine Höhe ist, und verwandelt sich bei unendlich kleiner Höhe in einen gleichen Cylinder.

§. 344.

Lehrs. Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich.

Bew. Denkt man sich die Höhen beider Pyramiden in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilungspunkte zur Grundfläche parallele Ebenen gelegt, so bestehen beide Pyramiden aus unendlich vielen abgekürzten Pyramiden, deren jede einem Prisma von derselben Basis und Höhe gleich ist (§. 343, Zus. 1.). Diese Prismen haben paarweise gleiche Grundflächen (§. 341, Zus. 2.) und gleiche Höhen, sind also einander gleich (§. 331, Zus. 2.). Nun bestehen aber beide Pyramiden aus gleichvielen solchen paarweise gleichen Prismen; also muß auch die Summe aller Prismen der einen gleich der Summe aller Prismen der andern Pyramide, d. h. die eine Pyramide gleich der andern sein.

Zus. 1. Alle Kegel mit gleichen Grundkreisen und Höhen sind einander gleich.

Zus. 2. Jeder Kegel ist einer Pyramide gleich, die mit ihm gleiche Basis und Höhe hat.

§. 345.

Lehrs. Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma mit derselben Grundfläche und Höhe.

Dat. $\triangle$ DEF $\cong$ ABC, und $\triangle$ DEF $\nparallel$ ABC (Fig. 178.).

Thes. ABCD $= \frac{1}{3}$ ABCDEF.

Bew. Legt man durch die Punkte A, D und F eine Ebene, welche pl. ACFE in der Diagonale AF schneidet, so besteht das Prisma aus den drei Pyramiden ABCD, AEFD und ACFD. Nun ist $\triangle$ DBC $\cong$ DFC (II.), also haben die dreiseitigen Pyramiden DBCA und DCFA gleiche in einer Ebene (BF) liegende Grundflächen, die Spitze A gemeinschaftlich, daher gleiche Höhe (§. 276.); also ist DBCA $=$ DCFA (§. 344.), oder ABCD $=$ ACFD.

Ferner ist $\triangle$ AEF $\cong$ ACF, also haben die Pyramiden AEFD

und ACFD gleiche Grundflächen und die Spitze D gemeinsam, folglich gleiche Höhe; daher AEFD = ACFD. Es ist somit

Pyr. ABCD = ACFD = AEFD = $1/3$ ABCDEF.

Zus. 1. Jedes dreiseitige Prisma kann also in drei gleiche Pyramiden zerlegt werden.

Zus. 2. Jede Pyramide (p) ist der dritte Theil eines Prisma (P), das mit ihr gleiche Basis und Höhe hat. Denn ist m eine dreiseitige Pyramide und M ein dreiseitiges Prisma mit derselben Basis und Höhe, so ist P = M (§. 331, Zus. 1.), und p = m (§. 344.). Nun ist aber $m = \frac{1}{3} M$ (Lehrs.), also auch $p = \frac{1}{3} P$.

Zus. 3. Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

§. 346.

Lehrs. Alle Pyramiden (P, p) und Kegel verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundflächen (B, b) und Höhen (H, h).

Thes. $P \div p = BH \div bh$.

Bew. Folgt mittelst §. 345, Zus. 2. aus §. 334.

Zus. 1. Pyramiden und Kegel verhalten sich bei gleichen Grundflächen wie ihre Höhen, bei gleichen Höhen wie ihre Grundflächen. Folgt aus obiger Proportion, wenn man in derselben B = b oder H = h setzt.

Zus. 2. Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Kuben homologer Kanten oder Dimensionen; ähnliche Kegel wie die Kuben der Radien oder Diameter ihrer Grundkreise, ihrer Höhen oder ihrer Achsen.

III. Kap. Von der Kugel.

§. 347.

Erkl. 1. Die Kugel oder Sphäre (Σφαῖρα, globus) ist ein Körper, welcher von einer krummen Fläche eingeschlossen ist, deren sämmtliche Punkte von einem bestimmten Punkte gleich weit entfernt sind.

Man kann sich eine Kugel dadurch entstehend denken, daß ein Halbkreis um seinen Diameter (Drehungsachse) herumgeführt wird, bis er wieder in die ursprüngliche Lage kommt.

2. Die eine Kugel begrenzende krumme Fläche heißt Oberfläche derselben, oder Kugelfläche, und der Punkt, von dem diese überall gleichweit absteht, der Mittelpunkt der Kugel und Kugelfläche oder das Kugelcentrum.

3. Jede vom Mittelpunkte an die Oberfläche einer Kugel gezogene Gerade wird ein Halbmesser oder Radius der Kugel; jede Gerade zwischen zwei Punkten der Kugelfläche eine Sehne; eine durch den Mittelpunkt gehende Sehne ein Kugeldiameter oder Durchmesser; endlich eine Gerade, welche mit der Kugelfläche nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich hat, eine Tangente der Kugel genannt.

4. Jede Durchschnittsfigur, in welcher eine Kugel von einer durch sie gelegten Ebene geschnitten wird, heißt ein Kugelschnitt.

5. Eine Ebene, welche eine Kugelfläche nur in einem einzigen Punkte trifft, heißt eine Berührungs- oder Tangentialebene, jener Punkt ihr Berührungspunkt.

6. Ein ebenflächiger Körper heißt einer Kugel a) eingeschrieben, oder die Kugel ihm umschrieben, wenn seine sämmtlichen Ecken in der Kugelfläche liegen; b) umschrieben, oder die Kugel ihm eingeschrieben, wenn alle seine Grenzflächen Tangentialebenen der Kugel sind.

Zus. 1. Alle Radien, also auch alle Diameter einer Kugel sind einander gleich.

Zus. 2. Kugeln mit gleichen Radien oder Durchmessern sind congruent, und eine Kugel ist demnach durch ihr Centrum und ihren Radius vollkommen bestimmt.

§. 348.

Lehrs. Jeder Kugelschnitt ist ein Kreis (Kugelkreis genannt), dessen Mittelpunkt in dem senkrecht auf denselben gefällten Kugelradius liegt.

Dat. $CG \perp$ pl. AEB (Fig. 179.).

Thes. $AD = BD = ED$ 2c.

Bew. Nimmt man im Umfange der Durchschnittsfigur beliebige Punkte A, E, B; verbindet dieselben mit C und D durch gerade Linien; so ist $AC = EC = BC$ (§. 347, Zus. 1.); daher

auch AD = ED = BD (§. 277, Zus. 1.), folglich der Schnitt ein Kreis, dessen Mittelpunkt D ist.

Zus. 1. Geht der Schnitt durch das Kugelcentrum; so ist der Radius der Kugel auch der des Schnittes.

Zus. 2. Alle Kugelkreise, deren Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, sind einander gleich (§. 201, Zus. 1.).

Zus. 3. Der Diameter eines Kugelkreises (also auch dieser selbst) ist um so größer, je kleiner seine Entfernung vom Kugelcentrum ist.

Zus. 4. Kugelkreise sind gleich oder ungleich, je nachdem sie gleiche oder ungleiche Entfernung vom Kugelcentrum haben.

§. 349.

Erkl. 1. Ein Kugelkreis, dessen Ebene durch den Mittelpunkt einer Kugel geht, wird ein größter- oder Hauptkreis, jeder andere ein kleinerer oder schlechthin Kugelkreis genannt.

Errichtet man im Mittelpunkte eines Kugelkreises auf dessen Ebene eine Senkrechte und verlängert sie beiderseits bis an die Kugelfläche, so heißt dieselbe die Achse, und ihre Endpunkte die Pole des Kugelkreises.

2. Kugelkreise, deren Ebenen parallel sind, nennt man Parallelkreise. Ein Parallelkreis, der zugleich durch das Kugelcentrum geht, wird auch Aequator genannt, weil er, wie sich leicht (analog §. 22.) zeigen läßt, die Kugel und Kugelfläche in zwei congruente Theile theilt, von denen jeder eine Halbkugel oder Hemisphäre heißt.

3. Der kleinere Bogen eines größten Kugelkreises, der zwischen zwei bestimmten Punkten der Kugelfläche liegt, wird die sphärische Entfernung dieser Punkte genannt.

4. Ein Winkel, den auf der Kugelfläche die Bogen zweier sich schneidender größter Kreise einschließen, heißt ein sphärischer Winkel. Seine Größe ist bestimmt durch den ebenen Winkel, den die Tangenten seines Scheitelpunktes einschließen, der auch zugleich der Neigungswinkel der beiden Kreisebenen ist, zu denen seine Schenkel als Bogen gehören (§. 209, Zus. 1. und §. 292, 2.).

Zus. 1. Jeder kleinere Kugelkreis ist durch drei, jeder größte durch zwei Punkte der Kugelfläche bestimmt (§. 272.).

Zus. 2. Je zwei größte Kugelkreise halbiren sich gegenseitig; denn ihr Durchschnitt ist ein beiden gemeinschaftlicher Kugeldiameter.

§. 350.

Erkl. 1. Ein Theil der Kugelfläche, welcher durch einen Kugelkreis begrenzt ist, heißt eine Kugelschale, Calotte oder Kugelmütze.

2. Ein zwischen zwei Parallelkreisen enthaltener Theil der Kugelfläche wird eine Zone, Gürtel oder Kugelriemen; der senkrechte Abstand der Ebenen beider Parallelkreise die Höhe der Zone genannt.

3. Ein Theil der Kugelfläche, der zwischen den halben Peripherien zweier sich schneidender größter Kreise liegt, heißt ein Kugelstreifen, ein sphärisches oder Kugelzweieck.

4. Wird ein Theil der Kugelfläche von den Bogen dreier Hauptkreise eingeschlossen, so nennt man ihn ein sphärisches oder Kugeldreieck, wenn von mehreren, ein sphärisches Vieleck. Die Bogen selbst heißen die Seiten, und die von ihnen eingeschlossenen sphärischen Winkel die Winkel des Drei- oder Vieleckes.

Ein sphärisches Dreieck, dessen Winkelspitzen die Pole der Seiten eines andern sind, heißt das Polardreieck des letztern. Man erhält das Polardreieck zu einem gegebenen, wenn man aus den Ecken des letzten Kugelradien zieht, durch je zwei derselben Ebenen legt, und zu dem dadurch entstehenden Triëder die Polarecke construirt (§. 308, 2.).

Zus. Jedem Kugeldreieck entspricht ein körperliches, und umgekehrt, die Seiten des sphärischen sind die Maße der entsprechenden Kantenwinkel (§. 218, Zus.) und die Winkel des sphärischen gleich den Flächenwinkeln des körperlichen Dreieckes. — Alle Sätze über Körperwinkel gelten also auch für sphärische Drei- und Vielecke.

§. 351.

Erkl. 1. Jeder von den beiden Theilen, in welche eine Kugel durch einen Kugelschnitt getheilt wird, der also von einer Calotte und der zugehörigen Kugelkreisebene begrenzt wird, heißt ein Kugelabschnitt oder ein Segment derselben.

Die Kreisebene wird Grundfläche und die Senkrechte aus ihrem Mittelpunkte an die Calotte die Höhe des Segmentes, sowie auch der Calotte genannt.

2. Ein zwischen den Ebenen zweier Parallelkreise und der zugehörigen Zone liegender Theil einer Kugel heißt eine körperliche Zone oder eine Kugelscheibe, die beiden parallelen Kreisflächen ihre Grundflächen und deren senkrechter Abstand die Höhe der Zone oder die Zonendicke.

3. Ein Theil der Kugel, der von einer Calotte und dem um den zugehörigen Kugelkreis gelegten Mantel eines geraden Kegels, dessen Spitze im Kugelcentrum liegt, begrenzt wird, wird ein Kugelausschnitt, =Sector oder auch Kugelkegel genannt.

4. Wird ein Theil der Kugel von einem Kugelzweieck und den Hälften zweier größter Kreise eingeschlossen, so nennt man ihn einen keilförmigen Kugelsector oder Kugelkeil, die beiden Halbkreise seine Seitenflächen und den Diameter, in welchem sie sich schneiden, den Rücken des Keiles.

5. Ein Ausschnitt einer Kugel, der als Grundfläche ein sphärisches Drei= oder Vieleck, und als Seitenflächen ebenso viele Sectoren größter Kugelkreise hat, als die Grundfläche Seiten enthält, heißt ein pyramidaler Kugelausschnitt oder eine Kugelpyramide.

6. Denkt man sich aus einer Kugel eine andere concentrische von kleinerm Radius herausgenommen, so nennt man den übrig bleibenden Theil eine Hohlkugel.

Anm. Wie kann man sich jeden der ebengenannten Körper entstehend denken?

§. 352.

Lehrs. Der Kugeldiameter, welcher durch den Mittelpunkt eines Kugelkreises geht, steht auf letzterm senkrecht, ist also dessen Achse.

Thes. GH $\perp$ pl. AEBF (Fig. 179.).

Bew. Ist D der Mittelpunkt des Kugelkreises, und man zieht in ihm zwei beliebige Durchmesser AB und EF, und an ihre Endpunkte Kugelradien, so ist $\triangle ADC \cong BDC$ (II.); daher auch $\measuredangle ADC = BDC = R$ (§. 29, Zus.).

Ebenso ergibt sich $\sphericalangle EDC = FDC = R$, daher CD oder GH $\perp$ pl. AEBF (§. 275.).

Zus. 1. Umgekehrt geht die Achse eines Kugelkreises stets durch den Mittelpunkt der Kugel (Lehrs. und §. 276.).

Zus. 2. Liegen die Mittelpunkte zweier oder mehrerer Kugelkreise in demselben Radius oder Diameter der Kugel, haben sie also eine gemeinschaftliche Achse; so sind sie parallel (§. 294.).

Zus. 3. Parallelkreise haben eine gemeinschaftliche Achse, also auch gemeinsame Pole; denn die Achse von einem ist es auch für die übrigen (§. 297.).

§. 353.

Lehrs. Ein Kugelkreis, welcher durch die Pole eines andern gelegt wird, ist I. ein größter Kreis, II. steht auf dem andern senkrecht, und III. halbirt ihn.

Bew. I. Der Kreis geht durch die Pole, also auch durch die Achse des andern Kugelkreises, mithin auch durch den Mittelpunkt der Kugel (§. 352, Zus. 1.); ist somit ein Hauptkreis.

II. Da er durch die Achse des Kugelkreises geht, so ist er auch auf ihm senkrecht (§. 300.).

III. Er geht, weil durch die Achse, durch den Mittelpunkt des andern, schneidet also diesen in einem Diameter, halbirt ihn somit (§. 201, Zus. 3.).

§. 354.

Lehrs. Jeder Pol eines Kugelkreises hat von allen Punkten der Peripherie desselben gleiche, sowohl I. geradlinige, als II. sphärische Entfernung.

Dat. AB $\perp$ pl. DFEG (Fig. 180.).

Thes. I. $AD = AF = AE$ ..; II. arc AD = arc AE ...

Bew. I. Nimmt man beliebige Punkte D, F, E in der Peripherie des Kugelkreises, und verbindet dieselben mit A und M durch gerade Linien, so folgt, da $DM = FM = EM$ ... ist, $AD = AF = AE$ ... (§. 277.). Auf gleiche Weise ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung in Bezug auf den andern Pol B.

II. Legt man durch die Achse AB beliebig Ebenen, so sind die Durchschnittsfiguren größte Kugelkreise (§. 353.), und die Bogen AD, AE u. s. w. erscheinen als Bogen desselben oder gleicher

Kreise, die zu gleichen Sehnen AD und AE (Nr. I.) gehören; sind also gleich (§. 219, Zus. 1.).

Zus. Die Pole eines jeden Kugelkreises haben die möglichst größte Entfernung auf der Kugelfläche: in gerader Linie den Kugeldiameter, im Bogen die halbe Peripherie eines Hauptkreises.

§. 355.

Lehrs. Eine Ebene, welche auf einem Kugelradius (oder Diameter) in dessen Endpunkt senkrecht steht, ist eine Tangentialebene.

Dat. pl. NP $\perp$ CB (Fig. 180.).

Bew. Man nehme in pl. NP einen beliebigen Punkt K, ziehe BK und CK, so ist $\measuredangle$ CBK = R; daher CK > BC (§. 93, Zus. 1.). Dasselbe gilt für jeden andern Punkt in pl. NP; also liegen alle Punkte des pl. NP, mit Ausnahme von B, außerhalb der Kugelfläche, sie ist somit eine Tangentialebene für den Punkt B.

Zus. 1. Die Verbindungslinie des Kugelcentrums mit dem Berührungspunkte einer Tangentialebene steht auf dieser senkrecht; denn sie ist die kürzeste Linie an dieselbe.

Zus. 2. Für einen Punkt der Kugelfläche gibt es nur eine einzige Tangentialebene (Zus. 1 und §. 293.).

Zus. 3. Die Senkrechte im Berührungspunkte einer Tangentialebene geht durch das Kugelcentrum, und umgekehrt.

Zus. 4. Alle in einer Tangentialebene durch den Berührungspunkt gezogenen Geraden sind für diesen Punkt Tangenten der Kugel, jede für den durch sie gehenden größten Kugelkreis.

§. 356.

Lehrs. Nimmt man auf jedem Schenkel eines sphärischen Winkels vom Scheitel aus einen Bogen = 90°, und legt durch die Endpunkte dieser Bogen einen Hauptkreis; so ist der zwischen jenen Punkten liegende Bogen dieses Kreises das Maß des sphärischen Winkels.

Dat. arc. AD = arc. AE = 90° (Fig. 181.).

Thes. arc. DE = $\measuredangle$ DAE.

Bew. Die Ebenen der Schenkel des $\measuredangle$ DAE schneiden sich in einem Diameter AB. Zieht man in ihnen die Kugelradien CD und CE, so ist, da arc. AD = 90° = AE, auch $\measuredangle$ ACD =

R = ACE (§. 60.); daher ∡ DCE = ∡ DAE (§. 349, 4.). Es ist aber arc. DE das Maß des ∡ DCE, somit auch des ∡ DAE; also arc. DE = ∡ DAE.

Zus. Die beiden sphärischen Winkel eines Kugelstreifens sind einander gleich.

§. 357.

Lehrs. Ein sphärisches Zweieck (Z) verhält sich zur Kugelfläche (S), wie die Anzahl der Grade seines sphärischen Winkels (n) zu 4R oder 360°.

Thes. $Z \div S = n \div 360$.

Bew. Macht man (Fig. 181.) arc. AD = AE = 90°, und legt durch C, D und E eine Ebene, so ist arc. DE = ∡ DAE = n° (§. 356.). Denkt man sich nun ein Maß m, welches in arc DE genau a mal, in dem ganzen Kreisumfange DEGF etwa b mal enthalten ist, so wird

1) arc DE $\div$ DEGF = a.m $\div$ b.m = a $\div$ b.

Wird ferner durch A und jeden mittelst des Maßes v erhaltenen Theilungspunkt ein Hauptkreis gelegt, so wird Z aus a gleichen Zweiecken bestehen, die ganze Kugelfläche aber deren b enthalten, daß also, wenn wir einen dieser Theile = μ setzen,

2) $Z \div S = a.\mu \div b.\mu = a \div b$ ist.

Es ergibt sich somit durch Comparation von 2) und 1):

Z $\div$ S = arc DE $\div$ DEGF = n $\div$ 360 (§. 228, Zus. 1.).

Zus. Ein Kugelzweieck ist der sovielte Theil der Kugelfläche, als die Anzahl der Grade seines Winkels ein Theil von 360° ist; denn aus obiger Proportion folgt Z = n.S : 360.

§. 358.

Lehrs. Haben zwei sphärische Dreiecke auf derselben Kugel (oder gleichen Kugeln) die drei Seiten beziehungsweise gleich; so sind die Dreiecke congruent oder symmetrisch gleich, je nachdem die gleichen Stücke in derselben oder in umgekehrter Ordnung aufeinander folgen.

Dat. AD = FD, AE = BF, DE = BD (Fig. 181.).

Thes. △ ADE ≅ BFD.

Bew. Zieht man nach allen Ecken beider Dreiecke Kugelradien, so entstehen in C die Trieder CADE und CFBD, deren

Kantenwinkel durch die Seiten der sphärischen Dreiecke gemessen werden (§. 218, Zus.). Die beiden Trieder haben demnach die Kantenwinkel (§. 219, Zus. 1.), also auch die Flächenwinkel gleich (§. 312, I.). Diese messen aber die Winkel der sphärischen Dreiecke (§. 349, 4.), welche somit auch alle Winkel gleich haben, und daher, wie die zugehörigen Trieder, congruent oder symmetrisch sind. (Vgl. §. 350, Zus.).

Zus. Ein sphärisches Dreieck ist durch seine drei Seiten bestimmt.

§. 359.

Lehrs. Legt man durch die Seiten eines sphärischen Dreieckes Ebenen, so theilen diese die ganze Kugelfläche in acht sphärische Dreiecke, von denen die jedesmal gegenüberliegenden gleich sind.

Thes. $\triangle$ ADE = BFG; $\triangle$ BDE = AFG ꝛc. (Fig. 181.).

Bew. Es sei ADE das gegebene Dreieck. Da die um die Kugel herum verlängerten Seiten des $\triangle$ ADE größte Kreise sind, alle Hauptkreise sich aber gegenseitig halbiren (§. 349, Zus. 2.), so ist

$$AD + BD = BD + BG, \text{ also auch } AD = BG,$$
$$AE + BE = BE + BF, \quad " \quad " \quad AE = BF,$$
$$DE + DF = DF + FG, \quad " \quad " \quad DE = FG;$$

mithin $\triangle$ ADE = BFG (§. 358.).

Auf dieselbe Weise ergibt sich $\triangle$ BDE = AFG ꝛc.

IV. Kap. Von der Messung der Körper.

§. 360.

Erkl. Die Messung der Körper betrifft entweder

1) die Oberfläche, und heißt in diesem Falle untersuchen, wie oft ein zur Messung von Flächen übliches Grundmaß (vgl. §. 169, f.) in der ganzen oder theilweisen Oberfläche eines Körpers enthalten sei; oder

2) das Volumen oder den Körperinhalt, und heißt dann angeben, wie oft ein als Maßeinheit für Körper angenommener Körper in einem gegebenen enthalten sei.

a) Messung der Oberflächen. *)

§. 361.

Lehrs. Die Oberfläche eines Prisma ist gleich der Summe aus der doppelten Grundfläche und dem Produkte aus einer Seitenkante (s) in den Perimeter (p) eines auf die Seitenkanten senkrechten Schnittes.

Dat. pl. NQ $\perp$ BG (Fig. 171.).

Thes. $f = 2b + sp$.

Bew. Die Oberfläche des Prisma besteht aus beiden congruenten Grundflächen und der Summe der Seitenflächen. Der Inhalt der beiden erstern ist also $= 2b$. Setzt man die ganze Seitenbegrenzung $= S$, so ist offenbar

$$S = AG + BH + CJ \ldots .$$

Da nun pl. NQ $\perp$ BG, so ist $\measuredangle GML = R = GMN$, mithin $AG = BG . LM$ und $BH = BG . MN$. Ebenso ergibt sich $CJ = CH . NP = BG . NP$ (§. 320, Zus. 1.) u. s. w.; somit

$$S = BG . LM + BG . MN + BG . NP \ldots\ldots$$
$$= BG (LM + MN + NP \ldots .) = sp; \text{ mithin}$$
$$f = 2b + sp.$$

Zus. 1. Die Oberfläche eines geraden Prisma ist gleich seiner doppelten Grundfläche und dem Produkte aus ihrem Umfange in die Höhe des Prisma, d. i. $f = 2b + ph$.

Zus. 2. Die Oberfläche eines Würfels ist $6a^2$, wenn a die Maßzahl der Kante bedeutet.

§. 362.

Lehrs. Die Oberfläche eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus dem Umfange des Grundkreises in die Summe aus dessen Radius und der Höhe des Cylinders.

Dat. EF $\perp$ pl. AB (Fig. 172.).

Thes. $f = 2r\pi (r + h) = d\pi (\frac{1}{2}d + h)$.

Bew. Der Inhalt eines Grundkreises ist $r^2\pi$, mithin der Flächeninhalt von beiden $= 2r^2\pi = \frac{1}{2}d^2\pi$.

---

*) In den nachfolgenden Untersuchungen soll stets f die Oberfläche, v das Volumen, b die Grundfläche, h die Höhe eines Körpers und r den Radius, d den Diameter einer Kugel, oder der Basis eines Cylinders oder Kegels bedeuten.

Der Mantel stellt sich in einer Ebene ausgebreitet als ein Rechteck dar, welches den Umfang des Grundkreises als Basis und eine Seite des Cylinders als Höhe hat; also ist sein Inhalt $= 2r\pi h$. Es wird somit

$$f = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi(r+h) = d\pi(\tfrac{1}{2}d+h).$$

Zus. Die Oberfläche eines gleichseitigen Cylinders ist dem sechsfachen Inhalte des Grundkreises gleich; denn es ist $h = 2r = d$; daher $f = 6r^2\pi = \frac{3}{2}d^2\pi$.

Anm. Die Berechnung des Mantels eines schiefen Cylinders gehört in das Gebiet der höhern Mathematik, indem der Inhalt desselben gleich ist dem Produkte aus einer Seite in den Umfang eines auf die Achse senkrechten Schnittes, dieser aber kein Kreis, sondern eine Ellipse ist.

§. 363.

Aufg. Die Oberfläche einer geraden cylindrischen Röhre zu finden, wenn nebst ihrer Höhe (Länge) I. die beiden Radien (R und r), II der kleinere Radius (r) und die Dicke (β) gegeben ist.

Aufl. $\begin{cases} \text{I. } f = 2\pi(R+r)(R-r+h); \\ \text{II. } f = 2\pi(2r+\beta)(\beta+h). \end{cases}$

Bew. I. Die ganze Begrenzung eines Hohlcylinders besteht aus zwei gleichen Kreisringen und zwei Cylindermänteln, dem äußern und innern; der Inhalt der beiden erstern ist $2.(R^2-r^2)\pi$ (§. 259.), der der letztern $2R\pi h$ und $2r\pi h$; daher

$$\begin{aligned} f &= 2\pi(R^2-r^2) + 2R\pi h + 2r\pi h, \\ &= 2\pi((R+r)(R-r) + (R+r)h) \\ &= 2\pi(R+r)(R-r+h). \end{aligned}$$

II. Es ist für diesen Fall $R = r + \beta$. Substituirt man diesen Werth von R in die Formel I.; so folgt die Formel II.

§. 364.

Aufg. Die Oberfläche I. einer ganzen, II. einer abgekürzten Pyramide zu bestimmen.

Aufl. u. Bew. Man berechne den Inhalt der Grundfläche (bei der abgekürzten beider Grundflächen), sowie den aller Seitenflächen, so ist die Summe der Resultate die gesuchte Oberfläche (§. 316, 3.).

Zus. 1. Die Oberfläche einer gleichseitigen Pyramide, wenn p oder na den Perimeter der Basis, α ein Apothem derselben,

und h' die Höhe eines Seitendreieckes oder s eine Seitenkante bezeichnet, ist (nach §. 115, Zus. 3. und §. 261.):

$$f = \frac{1}{2} p (\alpha + h') = \frac{1}{4} n a (2\alpha + \sqrt{4s^2 - a^2}).$$

Zus. 2. Hinsichtlich der Oberflächen der drei regulären Pyramiden findet man, wenn a die Länge einer Kante ausdrückt:

I. für die dreiseitige $f = a^2 \sqrt{3}$,

II. für die vierseitige $f = a^2 (1 + \sqrt{3})$, und

III. für die fünfseitige $f = \frac{5}{4} a^2 (\sqrt{1 + 0{,}4\sqrt{5}} + \sqrt{3})$.

§. 365.

Lehrs. Die Oberfläche eines geraden Kegels ist gleich dem Produkte aus dem halben Umfange seines Grundkreises in die Summe von dessen Radius und einer Seite (s) des Kegels.

Dat. AC $\perp$ pl. BD (Fig. 182.).

Thes. $f = r\pi (r + s) = \frac{1}{2} d\pi (\frac{1}{2} d + s)$.

Bew. Bezeichnen wir den Inhalt des Mantels durch m, so ist offenbar $f = b + m = r^2\pi + m$.

Denkt man sich die Fläche des Mantels abgewickelt und in eine Ebene gelegt, so stellt sie sich als Kreisausschnitt dar, dessen Bogen die Peripherie des Grundkreises und dessen Radius eine Seite des Kegels ist, daher ist $m = 2r\pi . \frac{1}{2} s = r\pi s$ (§. 257.); mithin $f = r^2\pi + r\pi s = r\pi (r + s) = \frac{1}{4} d\pi (d + 2s)$.

Zus. 1. Ist statt der Seite die Höhe des Kegels gegeben, so wird

$$f = r\pi (r + \sqrt{r^2 + h^2}) = \frac{1}{4} d\pi (d + \sqrt{d^2 + 4h^2});$$

denn da AC $\perp$ pl. BD, so wird $s^2 = r^2 + h^2$; mithin $s = \sqrt{r^2 + h^2}$.

Zus. 2. Beim gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$; daher

$$f = r\pi (r + 2r) = 3r^2\pi = \frac{3}{4} d^2\pi.$$

Bei dem rechtwinkligen Kegel ist $s = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$; also

$$f = r\pi (r + r\sqrt{2}) = r^2\pi (1 + \sqrt{2}).$$

§. 366.

Aufg. Die Oberfläche eines geraden abgekürzten Kegels aus den Radien (r und ϱ) seiner Grundflächen und einer Seite (s) zu berechnen.

Aufl. $f = \pi(r^2 + \varrho^2 + (r + \varrho)s)$.

Bew. Bezeichnet man den Inhalt des Mantels durch m, so hat man offenbar $f = r^2\pi + \varrho^2\pi + m$.

Denkt man sich (Fig. 182.) den Kegeltrunkus ergänzt, so ist sein Mantel gleich dem Unterschiede zwischen dem Mantel des vollständigen und dem des Ergänzungskegels. Setzt man die Seite des letztern, nämlich $AE = x$, so ist

a) $m = (s + x)r\pi - \varrho\pi x = sr\pi + x(r - \varrho)\pi$.

Legt man durch die Achse beliebig eine Ebene, die den Mantel und die Grundflächen schneidet, so hat man, da EG ‖ BC ist:

$AB \div AE = BC \div EG$, oder

$(s + x) \div x = r \div \varrho$; oder auch

$s \div x = (r - \varrho) \div \varrho$ (Arithm. §. 258.); folglich

$x(r - \varrho) = s\varrho$.

Durch Substitution dieses Werthes von $x(r - \varrho)$ in a) wird

$m = sr\pi + s\varrho\pi = s\pi(r + \varrho)$, und daher

$f = r^2\pi + \varrho^2\pi + s\pi(r + \varrho) = \pi(r^2 + \varrho^2 + (r + \varrho)s)$.

Zus. Ist statt der Seite die Höhe des abgekürzten Kegels bekannt, so erhält man für dessen Oberfläche die Gleichung:

$$f = \pi(r^2 + \varrho^2 + (r + \varrho)\sqrt{h^2 + (r - \varrho)^2}).$$

Denn zieht man in pl. ABC aus E die Gerade $EK \perp BC$, so ist $\overline{EB}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{BK}^2$; also $s = \sqrt{h^2 + (r - \varrho)^2}$, da $EB = s$, $EK = h$, und $BK = BC - CK = BC - EG = r - \varrho$ ist.

Anm. Welchem Trapezium oder Rechtecke ist der Mantel eines geraden Kegeltrunkus gleich?

§. 367.

Lehrs. Die Oberfläche einer Kugel ist dem vierfachen Inhalte eines größten Kreises gleich.

Thes. $f = 4r^2\pi = d^2\pi$.

Bew. Es sei (Fig. 183.) ABC ein Quadrant eines Hauptkreises, dem ein reguläres Polygon von 4n Seiten eingeschrieben ist, wovon also der Quadrant n Seiten enthält. Dreht sich nun der Quadrant um den Radius AC, so beschreibt der Bogen AB eine Halbkugelfläche, von dem Theile ADEB des Polygons aber die Seite AD den Mantel eines vollständigen, jede folgende DE, BE den eines abgekürzten Kegels.

Man fälle DF, EG senkrecht auf AC, halbire die Seiten des Polygons in H, K, L und ziehe CH, CK, CL, dann HM, und KN senkrecht auf AC; so ist, wenn man den von der Seite AD beschriebenen Kegelmantel mit m_1 bezeichnet:

a) $m_1 = DF\pi . AD$ (§. 365.).

Nun ist aber, weil $CH \perp AD$ steht (§. 206, Zus. 1.),

$\sphericalangle AHM + CHM = CHM + HCM = R$, daher

$\sphericalangle AHM = HCM = ADF$ (§. 45, III.); folglich

$\triangle ADF \sim CHM$ (§. 149, Zus. 1.), mithin

$AD \div AF = CH \div HM$, oder

$= CH \div \frac{1}{2}DF$ (§. 140, III.); woraus

$AD . DF = 2AF . CH$ folgt.

Dieser Werth von AD.DF in die Gleichung a) substituirt, gibt

1) $m_1 = 2\pi . AF . CH = 2p\pi . \alpha$,

wenn man das Perpendikel $CH = p$, und $AF = \alpha$ setzt.

Der Mantel m_2 des Kegeltrunkus, den die Seite DE beschreibt, und dessen Grundflächen DF und EG als Radien haben, ist

b) $m_2 = DE(DF + EG)\pi = 2\pi . DE . KN$ (§. 144.).

Fällt man noch $DP \perp EG$, so ist

$\sphericalangle DKN + CKN = CKN + KCN = R$, folglich

$\sphericalangle DKN = KCN = DEP$, ferner

$\sphericalangle CNK = EPD = R$; daher

$\triangle CKN \sim DEP$. Hieraus folgt

$CK \div KN = DE \div DP$; somit

$KN . DE = CK . DP = CK . FG$.

Dieser Werth von KN.DE in die Gleichung b) gesetzt, gibt

2) $m_2 = 2CK . FG\pi = 2p\pi . \beta$,

wenn wieder $CK = CH = p$ (§. 207.) und $FG = \beta$ gesetzt wird.

Ebenso folgt 3) $m_3 = 2CL . GC\pi = 2p\pi . \gamma$ rc.

Es wird daher durch Addition der Gleichungen 1), 2), 3)...

$m_1 + m_2 + m_3 \ldots = 2p\pi(\alpha + \beta + \gamma \ldots .)$.

Nun gibt aber die Summe aller Kegelmäntel die Oberfläche des halben durch die Umdrehung des Polygons entstandenen Körpers, d. h. es ist, wenn wir diese durch $\frac{1}{2}s$ bezeichnen, $m_1 + m_2 + m_3 \ldots . = \frac{1}{2}s$; ferner ist, wie groß auch n sein mag, $\alpha + \beta + \gamma \ldots . = r$, daher

$\frac{1}{2}s = 2p\pi . r$; also $s = 4p\pi . r$.

Nimmt man n unendlich groß, so wird der Unterschied zwischen dem Polygon und dem Kreise verschwindend klein (§. 243, Zus. 3.), dadurch geht p in r und s in f über; und es ist somit die ganze Kugelfläche oder $f = 4r\pi . r = 4r^2\pi = d^2\pi$.

Zus. 1. Kugeln verhalten sich bezüglich ihrer Oberflächen wie die Quadrate ihrer Radien (also auch ihrer Diameter). Denn bezeichnen F und f die Oberflächen zweier Kugeln, R und r ihre Radien, so ist $F = 4R^2\pi$ und $f = 4r^2\pi$; mithin

$$F \div f = 4R^2\pi \div 4r^2\pi = R^2 \div r^2.$$

Zus. 2. Die Oberfläche einer Kugel ist dem Produkte aus ihrem Umfange (p) in den Diameter gleich. Denn aus der Gleichung $f = 4r^2\pi = 2r\pi . 2r$ folgt, indem $2r = d$ und $2r\pi = p$ ist, $f = dp$.

Zus. 3. Für ein Kugelzweieck ist $f = nS : 360$ (§. 357, Zus.). Da nun $S = 4r^2\pi$; so wird

$$f = \frac{n}{360} . 4r^2\pi = \frac{r^2\pi . n}{90}, \text{ d. h. } —?$$

Anm. Welchem Cylindermantel oder Rechtecke ist (nach Zus. 2.) die Kugelfläche gleich?

§. 368.

Lehrs. Der Flächeninhalt einer Calotte ist gleich dem Produkte aus ihrer Höhe und der Peripherie eines Hauptkreises.

Thes. $f = 2r\pi h$.

Bew. Eine Calotte entsteht durch die Umdrehung des Bogens eines halben Kreissegmentes um seine Höhe. Denkt man sich diesem Bogen einen Theil eines regulären Polygons eingeschrieben, so erhält man auf dieselbe Weise, wie §. 367., für den Inhalt der Calotte den Ausdruck $f = 2r\pi h$.

Zus. 1. Soll der Inhalt einer Calotte durch ihre Höhe h und den Radius ϱ des begrenzenden Kugelkreises bestimmt werden, so hat man (Fig. 179.):

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$ oder $r^2 = \varrho^2 + (r - h)^2$, woraus sich $r = (\varrho^2 + h^2) : 2h$ ergibt; mithin

$$f = 2\pi h . \frac{\varrho^2 + h^2}{2h} = \pi (\varrho^2 + h^2.$$

Zus. 2. Sind die Radien $BC = r$, und $BD = \varrho$ gegeben, so findet man für den Inhalt der Calotte, da $(r - h)^2 = r^2 - \varrho^2$, also $r - h = \pm\sqrt{r^2 - \varrho^2}$ und $h = r \mp \sqrt{r^2 - \varrho^2}$ ist,

$$f = 2r\pi(r \mp \sqrt{r^2 - \varrho^2}).$$

§. 369.

Lehrs. Der Flächeninhalt einer Zone ist gleich dem Produkte aus dem Umfange eines Hauptkreises in die Höhe der Zone.

Thes. $f = 2r\pi h$.

Bew. Denkt man sich die Zone ABGF (Fig. 184.) zu einer Calotte erweitert, und setzt $DM = x$; so ist offenbar der Inhalt der Zone die Differenz zweier Calotten, welche $(h + x)$ und x als Höhe haben; also $f = 2r\pi(h + x) - 2r\pi x = 2r\pi h$.

Zus. Sind zur Flächenberechnung einer Zone nebst deren Höhe die Radien ϱ und ϱ_1 ihrer Begrenzungskreise gegeben; so hat man zur Bestimmung des Kugelradius, wenn man $CE = x$ setzt, da $\measuredangle CEG = CDF = R$ ist (§. 352.):

$$r^2 = \overline{EG}^2 + \overline{CE}^2 = \varrho^2 + x^2, \text{ ebenso}$$

$$r^2 = \overline{DF}^2 + \overline{CD}^2 = \varrho_1^2 + (h + x)^2; \text{ mithin}$$

$$\varrho^2 + x^2 = \varrho_1^2 + (h + x)^2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{\varrho^2 - \varrho_1^2 - h^2}{2h} \text{ folgt.}$$

— Es ist somit

$$r^2 = \varrho^2 + \frac{(\varrho^2 - \varrho_1^2 - h^2)^2}{4h^2} = \frac{(2h\varrho)^2 + (\varrho^2 - \varrho_1^2 - h^2)^2}{4h^2}; \text{ also}$$

$$r = \frac{1}{2h}\sqrt{(2h\varrho)^2 + (\varrho^2 - \varrho_1^2 - h^2)^2}.$$

Substituirt man diesen Werth von r in die Gleichung $f = 2r\pi h$, so wird

$$f = \pi\sqrt{(2h\varrho)^2 + (\varrho^2 - \varrho_1^2 - h^2)^2}, \text{ oder auch}$$

$$= \pi\sqrt{[(\varrho + \varrho_1)^2 + h^2][(\varrho - \varrho_1)^2 + h^2]}.$$

§. 370.

Lehrs. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes ist dem Produkte aus dem 180^{ten} Theile eines größten Kugelkreises in den Ueberschuß seiner Winkelsumme (s) über 180^0 gleich.

Thes. $\triangle ADE = \frac{r^2\pi}{180}(s-180)$. (Fig. 181.).

Bew. Erweitert man die Seiten des $\triangle$ ADE gehörig, so entstehen drei sich schneidende größte Kugelkreise, welche die Kugelfläche in acht Dreiecke theilen, von denen je zwei gegenüberstehende (BDE und AFG) gleich (§. 359.), und je vier, die einen Durchschnittspunkt von zwei größten Kugelkreisen als gemeinsame Winkelspitze haben, die halbe Kugelfläche einnehmen, $(=2r^2\pi)$ sind. Nun ist

Zweieck $ADBEA = \triangle ADE + BDE = \frac{r^2\pi . A}{90}$ (§. 367, Zus. 3.),

" $ADEGA = \triangle ADE + AGE = \frac{r^2\pi . D}{90}$, und

" $AEDFA = \triangle ADE + ADF = \frac{r^2\pi . E}{90}$.

Hieraus folgt durch Addition dieser Gleichungen

$3 . \triangle ADE + BDE + AGE + ADF = \frac{r^2\pi}{90}(A + D + E)$; davon

$\triangle ADE + AFG + AGE + ADF = 2r^2\pi$ abgezogen, gibt

$2 . \triangle ADE = \frac{r^2\pi}{90}(A+D+E) - 2r^2\pi = \frac{r^2\pi}{90}(A+D+E-180)$; also

$\triangle ADE = \frac{r^2\pi}{180}(A + D + E - 180) = \frac{r^2\pi}{180}(s-180)$.

Zus. Da sich jedes sphärische Polygon (wie ein ebenes durch Diagonalen) durch Bogen größter Kreise in Dreiecke zerlegen läßt; so ist, wenn allgemein S die Winkelsumme eines sphärischen n Eckes bezeichnet, dessen Flächeninhalt $f = \frac{r^2\pi}{180}[S - (n-2)\,180^0]$.

Anm. Den Ueberschuß der drei Winkel eines sphärischen Dreieckes über 180^0 nennt man den sphärischen Exceß desselben.

§. 371.

Aufg. Die Gesammtoberfläche eines Kugelsegmentes zu finden, wenn I. der Kugelradius und die Höhe des Segmentes; II. der Radius (ϱ) der Basis und die Höhe des Segmentes, und III. der Kugelradius und der der Basis des Segmentes gegeben ist.

Aufl. $\left\{ \begin{array}{l} \text{I. } f = h\pi(4r - h). \text{ — II. } f = \pi(2\varrho^2 + h^2). \\ \text{III. } f = \pi(\varrho^2 + 2r(r \mp \sqrt{r^2 - \varrho^2})). \end{array} \right.$

Bew. I. Der Inhalt der Calotte ist $2r\pi h$, der der Basis $= \overline{AD}^2\pi$ (Fig. 179.); somit $f = 2r\pi h + \overline{AD}^2\pi$.

Es ist aber $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = r^2 - (r - h)^2$
$= h(2r - h)$; also

$$f = 2r\pi h + h(2r - h)\pi = h\pi(4r - h).$$

II. Der Inhalt der Basis ist $\varrho^2\pi$; dann (nach §. 368, Zus. 1.) der Flächeninhalt der Calotte $\pi(\varrho^2 + h^2)$; somit

$$f = \varrho^2\pi + \pi(\varrho^2 + h^2) = \pi(2\varrho^2 + h^2).$$

III. Es ist für diesen Fall die Basis $= \varrho^2\pi$, der Inhalt der Calotte (§. 368, Zus. 2.) $= 2r\pi(r \mp \sqrt{r^2 - \varrho^2})$; folglich

$$f = \pi[\varrho^2 + 2r(r \mp \sqrt{r^2 - \varrho^2})].$$

§. 372.

Aufg. Die Oberfläche eines Kugelsectors aus der Höhe seiner Basis (h) und dem Kugelradius zu finden.

Aufl. $f = r\pi[2h + \sqrt{h(2r - h)}]$.

Bew. Der Inhalt der begrenzenden Basis (Fig. 184.) ist $= 2r\pi h$, der Inhalt des Mantels $= CH\pi . HL = r\pi . HL$; daher

$$f = 2r\pi h + r\pi . HL = r\pi(2h + HL).$$

Es ist aber (§. 225, Zus. 2.) $\overline{HL}^2 = LM . LN = h(2r - h)$, also $HL = \sqrt{h(2r - h)}$; mithin obige Formel.

Zus. Ist entweder I. der Kugelradius $CK = r$ und $KL = \varrho$, oder II. $KL = \varrho$ und $LN = h$ gegeben, so findet man

I. $f = r\pi(2r + \varrho \mp 2\sqrt{r^2 - \varrho^2})$, und

II. $f = \frac{\pi}{2h} . (2h + \varrho)(h^2 + \varrho^2)$.

§. 373.

Aufg. Die Oberfläche I. einer Kugelscheibe aus den Radien (ϱ und ϱ_1) ihrer Grundflächen und ihrer Höhe; II. eines Kugelkeiles aus dem Radius der Kugel und dem Winkel (n) des Zweieckes zu bestimmen.

Aufl. $\begin{cases} \text{I. } f = \pi(\varrho^2 + \varrho_1{}^2 + \sqrt{[(\varrho + \varrho_1)^2 + h^2][(\varrho - \varrho_1)^2 + h^2]}. \\ \text{II. } f = r^2\pi(90 + n) : 90. \end{cases}$

Bew. I. Da der Inhalt der begrenzenden Zone $= 2r\pi h$ (§. 369.), so ist offenbar $f = \varrho^2\pi + \varrho_1{}^2\pi + 2r\pi h$.

Substituirt man statt $2r\pi h$ seinen Werth aus §. 369, Zus., so ergibt sich obige Formel.

II. Die beiden Seitenflächen sind Hälften größter Kreise, daher der Inhalt beider $= r^2\pi$. Der Inhalt des Zweieckes $= r^2\pi n : 90$ (§. 367, Zus. 3.); mithin

$$f = r^2\pi + \frac{r^2\pi n}{90} = \frac{r^2\pi}{90}.(90 + n).$$

b) Messung des körperlichen Inhaltes.

§. 374.

Erkl. 1. Als Grundmaß zur Bestimmung des Volumens eines Körpers wird der Kubikschuh oder -fuß (1 c′) gebraucht, d. i. ein Würfel, dessen Kante die Einheit des Längenmaßes ist.

In Bezug auf dieses Normalmaß wird das Volumen eines Körpers auch (gewöhnlich) sein kubischer oder Kubikinhalt genannt, und die Bestimmung desselben heißt ihn kubiren.

2. Der Kubikschuh wird eingetheilt in Kubikzolle, diese in Kubiklinien, und diese in Kubikscrupel, und zwar ist

a) nach dem Decimalsysteme (dc):

$$1\,c' = 1000\,c'' = 1000000\,c''' = 1000000000\,c''''$$
$$1\,c'' = 1000\,c''' = 1000000\,c''''$$
$$1\,c''' = 1000\,c'''' ;$$

b) nach dem Duodecimalsysteme (ddc.):

$$1\,c' = 1728\,c'' = 2985984\,c''' = 5159780352\,c''''$$
$$1\,c'' = 1728\,c''' = 2985984\,c''''$$
$$1\,c''' = 1728\,c''''.$$

Zus. Einen Körper messen heißt demnach auch seinen Inhalt in Kubik-Schuh, -Zoll u. s. w. angeben.

Anm. 1. Das Grundmaß für Körper nach dem neuen französischen Maße ist der Kubikmeter, welcher Stère genannt wird, und 1000 Kubikdecimeter enthält. — Das Grundmaß für Flüssigkeiten ist der Litre = 1 Kubikdecimeter oder ein Decistere.

Anm. 2. Zur Vergleichung der wichtigsten Körpermaßeinheiten dient folgende Tafel:

Bayer. c′.	Kub.-Meter.	Par. c′.	Rhein. c′.	Wien. c′.	Engl. c′.
1	0·024861	0·725294	0·804154	0·787049	0·878009
40·22350	1	29·17385	32·34587	31·65785	35·31658
1·378752	0·034277	1	1·108728	1·085145	1·210556
1·243543	0·030916	0·901934	1	0·978729	1·091842
1·270570	0·031588	0·921536	1·021733	1	1·115571
1·138941	0·028315	0·826067	0·915884	0·896402	1

§. 375.

Erkl. Von den üblichen Körpermaßen sind noch zu bemerken

a) als eigentliche Körpermaße:

1) die Holzklafter = 126c′ (= 6.6.3½),

2) die Kubikklafter (Kbklft.) = 216c′,

3) die Kubikruthe (c⁰) = 1000c′ dc. und 1728c′ ddc.,

4) die Schachtruthe = 100c′ (= 10.10.1),

5) die Kubikmeile (cm.) = 16″348384′872000c′;

b) als sogenannte Hohlmaße:

1) die bayer. Maaß = 43c″ dc. = 74·304c″ ddc.,

2) der Schenkeimer = 60 Maaß = 2580c″ dc.,

der Visireimer = 64 Maaß = 2752c″ dc.,

3) der bayer. Schäffel = 208·5 Maaß = 8965·5c″ dc.

§. 376.

Lehrs. Der körperliche Inhalt eines Prisma ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.

Thes. $v = bh$.

Bew. Bezeichnet v den körperlichen Inhalt des gegebenen Prisma und w den Inhalt des als Maßeinheit für v dienenden Würfels; so ist, da die Grundfläche und Höhe des letztern, in Bezug auf v, = 1 sind,

$v \div w = bh \div 1.1$ (§. 334.); mithin $v = bh.w$,

d. h. es ist in dem Prisma die Maßeinheit w so oft enthalten, als das Produkt der Maßzahlen seiner Basis b und Höhe h Einheiten hat. Da nun w eine beliebige Maßeinheit sein kann, so ist allgemein $v = bh$.

Zus. Der Kubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Produkte aus drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten, oder aus seiner Länge, Breite und Höhe; der Inhalt eines Würfels, dessen Kante a ist, $= a^3$.

§. 377.

Lehrs. Der Körperinhalt eines jeden Cylinders ist dem Produkte aus seinem Grundkreise und seiner Höhe gleich.

Thes. $v = r^2\pi h = \frac{1}{4}d^2\pi h$.

Bew. Da der Cylinder als ein unendlich vielseitiges Prisma betrachtet werden kann, so ist sein Volumen $v = bh$ (vergl. §. 331, Zus. 3.), aber $b = r^2\pi = \frac{1}{4}d^2\pi$; folglich $v = r^2\pi h = \frac{1}{4}d^2\pi h$.

Zus. Für den gleichseitigen Cylinder ist $h = 2r = d$, daher $v = 2r^3\pi = \frac{1}{4}d^3\pi$.

§. 378.

Aufg. Den kubischen Inhalt eines Hohlcylinders I. aus den beiden Diametern (d und δ) und der Höhe; II. aus seiner Weite (δ), der Dicke (β) und Höhe (Länge) zu berechnen.

Aufl. I. $v = \frac{1}{4}\pi h(d^2 - \delta^2)$. — II. $v = \beta\pi h(\delta + \beta)$.

Bew. I. Der Hohlcylinder ist offenbar eine Differenz zweier Cylinder von gleicher Höhe (§. 322, 5.); es ist daher

$$v = \frac{1}{4}d^2\pi h - \frac{1}{4}\delta^2\pi h = \frac{1}{4}\pi h(d^2 - \delta^2).$$

II. Es ist in diesem Falle $d = \delta + 2\beta$. Substituirt man diesen Werth in die Gleichung I., so folgt nach gehöriger Reduktion die Gleichung II.

Zus. Ist d statt δ gegeben, so erhält man $v = \beta\pi h(d - \beta)$.

§. 379.

Aufg. Den körperlichen Inhalt eines schief gegen die Basis abgeschnittenen geraden Cylinders aus seinem Radius und seiner größten und kleinsten Seite (s und s') zu finden.

Aufl. $v = \frac{1}{2}r^2\pi(s + s')$.

Bew. Man ergänze (Fig. 185.) den abgeschnittenen Theil, indem man durch C eine Kreisfläche CF ⫲ pl. AB legt, lege durch D einen zweiten Kreis DE ⫲ AB; so ist der Cylinder $AE = r^2\pi . AD = r^2\pi s'$, und $EF = r^2\pi . CE = r^2\pi(BC - BE) = r^2\pi(s - s')$.

Nun ist aber, wie leicht einzusehen, der Körper $DEC = \frac{1}{2} EF$, somit $DEC = \frac{1}{2} r^2 \pi (s - s')$, folglich

$$AE + DEC = r^2 \pi s' + \frac{1}{2} r^2 \pi (s - s') = \frac{1}{2} r^2 \pi (s + s').$$

§. 380.

Lehrs. Der kubische Inhalt I. einer **Pyramide** und II. eines **Kegels** ist dem dritten Theile des Produktes aus Grundfläche und Höhe gleich.

Thes. I. $v = \frac{1}{3} bh$. — II. $v = \frac{1}{3} r^2 \pi h = \frac{1}{12} d^2 \pi h$.

Bew. I. Denkt man sich ein Prisma, das mit der Pyramide einerlei Basis und Höhe hat, so ist sein Volumen $= bh$; daher der Inhalt der Pyramide, oder $v = \frac{1}{3} bh$ (§. 345, Zus. 2.).

II. Setzt man in der Formel für die Pyramide $b = r^2 \pi = \frac{1}{4} d^2 \pi$; so hat man den Inhalt des Kegels (§. 338, 1.).

Zus. 1. Ist statt der Höhe eines geraden Kegels seine Seite (s) gegeben, so wird $h = \sqrt{s^2 - r^2}$; somit

$$v = \frac{1}{3} r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2} = \frac{1}{24} d^2 \pi \sqrt{4s^2 - d^2}.$$

Zus. 2. Für den **rechtwinkligen** Kegel ist $h = r$ oder, wenn s die Seite desselben bezeichnet, $h = r = \frac{1}{2} s \sqrt{2}$; daher wird

$$v = \frac{1}{3} r^3 \pi = \frac{1}{24} d^3 \pi = \frac{1}{4} s^3 \sqrt{2};$$

für den **gleichseitigen** ist $h^2 = (2r)^2 - r^2$, also $h = r\sqrt{3}$; mithin

$$v = \frac{1}{3} r^3 \pi \sqrt{3} = \frac{1}{24} d^3 \pi \sqrt{3}.$$

Zus. 3. Bezeichnen h und h' die beiden Höhen eines **Doppelkegels**, so ergibt sich für dessen Inhalt

$$v = \frac{1}{3} r^2 \pi (h + h') = \frac{1}{12} d^2 \pi (h + h').$$

§. 381.

Aufg. Den Kubikinhalt I. einer **abgekürzten Pyramide**, und II. eines **abgekürzten Kegels** zu finden, wenn nebst der Höhe bei ersterer die Grundflächen (b und g), bei letzterm die Radien (r und ϱ) derselben gegeben sind.

Aufl. I. $v = \frac{1}{3} h (b + \sqrt{bg} + g)$. — II. $v = \frac{1}{3} h \pi (r^2 + r\varrho + \varrho^2)$.

Bew. I. Ergänzt man die abgekürzte Pyramide BH (Fig. 177.) zur vollständigen, so ist offenbar BH die Differenz zwischen der

ganzen und der Ergänzungspyramide. Zieht man AM $\perp$ pl. BD, und setzt die Höhe der Ergänzungspyramide AL = x; so ist

$$v = \tfrac{1}{3}b(h + x) - \tfrac{1}{3}gx = \tfrac{1}{3}(bh + bx - gx),$$
$$= \tfrac{1}{3}(bh + [b - g]x).$$

Um nun x zu bestimmen, hat man (nach §. 341, II.):

$$b \div g = (h + x)^2 \div x^2, \text{ oder}$$
$$\sqrt{b} \div \sqrt{g} = (h + x) \div x, \text{ woraus}$$
$$x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{b} - \sqrt{g}} = \frac{h\left(\sqrt{bg} + g\right)}{b - g}, \text{ also}$$
$$(b - g)x = h\left(\sqrt{bg} + g\right) \text{ folgt.}$$

Durch Substitution dieses Werthes von (b — g) x wird sofort

$$v = \tfrac{1}{3}\left(bh + h(\sqrt{bg} + g)\right) = \tfrac{1}{3}h\,(b + \sqrt{bg} + g).$$

II. Es ergibt sich auf dieselbe Art, wie oben für die Pyramide, oder durch Substitution, indem man in der Formel für die abgekürzte Pyramide $b = r^2\pi$ und $g = \varrho^2\pi$ setzt:

$$v = \tfrac{1}{3}\pi h\,(r^2 + r\varrho + \varrho^2) = \tfrac{1}{12}h\pi\,(d^2 + d\delta + \delta^2),$$

wenn d und δ die Diameter der Grundkreise bezeichnen.

Anm. 1. Die Formel für den Inhalt eines abgekürzten Kegels läßt sich in folgende für die Anwendung bequemere verwandeln:

$$v = \pi h\left(\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{r-\varrho}{2}\right)^2\right) = \pi h\left(\left(\frac{d+\delta}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{d-\delta}{4}\right)^2\right).$$

Anm. 2. Vorstehende Formel kann man auch zur Bestimmung des Kubikinhaltes eines Fasses gebrauchen, das man als einen abgekürzten Doppelkegel betrachtet. Es bezeichnet hiebei h die Länge, d die Spundtiefe, d. i. den Diameter des mitten durch den Spund parallel zu den Böden gelegten Durchschnittes, und δ den Diameter eines Bodens des Fasses.

Eine andere Formel, wegen ihrer Richtigkeit und Genauigkeit am meisten in Anwendung, ist die Lambert'sche, welche den Inhalt eines Fasses als einen Cylinder mit der Höhe h nimmt, dessen Diameter das arithmetische Mittel zwischen der doppelten Spundtiefe (d) und der Bodenweite (δ) ist, und demnach

$$v = \pi h\left(\frac{2d + \delta}{6}\right)^2 \text{ gibt.}$$

§. 382.

Lehrs. Der Kubikinhalt eines dreiseitigen Prismoids ist gleich dem Produkte aus dem arithmetischen Mittel seiner drei Seiten-

kanten (s, s_1, s_2) in den Flächeninhalt (q) einer auf dieselben senkrechten Durchschnittsfigur.

Thes. $v = \frac{1}{3}(s + s_1 + s_2) . q$.

Bew. Es sei (Fig. 186.) $AF = s$, $BE = s_1$ und $CD = s_2$, dann $\triangle GHK \perp AF$, so sind auch BE und CD senkrecht auf pl. GHK (§. 279.), ebenso pl. BD (§. 300.).

Legt man durch A, G und H, dann durch F, G und H Ebenen, so wird das Prismoid in zwei dreiseitige Pyramiden (AGHK und FGHK) und zwei vierseitige (ABG und FEG) zerlegt.

Fällt man noch $KL \perp GH$, so ist auch $KL \perp$ pl. BD (§. 300, Zus. 1.), folglich die Höhe der beiden vierseitigen Pyramiden, deren Grundflächen die Trapezien BG und GE sind; ferner ist $\frac{1}{2} GH . KL = q$. Man hat somit

$$v = AGHK + FGHK + ABG + FEG,$$
$$= \frac{1}{3} q . AK + \frac{1}{3} q . FK + \frac{1}{3} BG . KL + \frac{1}{3} EG . KL,$$
$$= \frac{1}{3} q (AK + FK) + \frac{1}{3} KL . (BG + EG),$$
$$= \frac{1}{3} q . s + \frac{1}{3} KL . CE = \frac{1}{3} q . s + \frac{1}{3} KL . \frac{1}{2} GH . (BE + CD),$$
$$= \frac{1}{3} q . s + \frac{1}{3} q . (s_1 + s_2) = \frac{1}{3} q . (s + s_1 + s_2).$$

Zus. 1. Ist $GH = b$, $KL = h$, so ist $q = \frac{1}{2} b h$; daher $v = \frac{1}{6} b h (s + s_1 + s_2)$.

Zus. 2. Ein mehrseitiges schief abgeschnittenes Prisma kann in dreiseitige zerlegt und aus dem Inhalte dieser letztern der Gesammtinhalt gefunden werden.

§. 383.

Lehrs. Der Kubikinhalt einer Kugel ist dem dritten Theile des Produktes aus ihrer Oberfläche und ihrem Radius gleich.

Thes. $v = \frac{1}{3} . 4 r^2 \pi . r = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi$.

Bew. Denkt man sich die ganze Kugelfläche in unendlich viele und kleine Theile (z. B. in Dreiecke) getheilt, so kann man diese einzeln als ebene Figuren ansehen. Bezeichnet man der Ordnung nach ihre Flächeninhalte durch α, β, γ ...., so ist offenbar $\alpha + \beta + \gamma \, . \, . \, . \, . = 4 r^2 \pi = d^2 \pi$ (§. 367.).

Betrachtet man ferner jene unendlich kleinen Figuren als Grundflächen von Pyramiden, die ihre Spitze im Kugelcentrum haben, so sind ihre Inhalte, da alle den Kugelradius als Höhe haben, der Ordnung nach $\frac{1}{3}\alpha r$, $\frac{1}{3}\beta r$, $\frac{1}{3}\gamma r$ .... (§. 380, I.).

Nun machen aber alle diese Pyramiden den ganzen Kugelkörper aus; daher wird durch Addition derselben:

$$v = \frac{1}{3}r(\alpha + \beta + \gamma \ldots .) = \frac{1}{3}r \, . \, 4r^2\pi = \frac{1}{6}d \, . \, d^2\pi, \text{ d. i.}$$

$$v = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi.$$

Zus. 1. Jede Kugel ist also einer Pyramide gleich, welche die Oberfläche der Kugel als Basis und ihren Radius als Höhe hat.

Zus. 2. Kugeln verhalten sich ihrem Körperinhalte nach wie die Kuben ihrer Radien, (oder Diameter). Denn sind V und v die Inhalte, R und r die Radien zweier Kugeln, so ist $V = \frac{4}{3}R^3\pi$ und $v = \frac{4}{3}r^3\pi$; daher

$$V \div v = \frac{4}{3}R^3\pi \div \frac{4}{3}r^3\pi = R^3 \div r^3.$$

Zus. 3. Der körperliche Inhalt einer Hohlkugel ist eine Differenz der Inhalte zweier Kugeln. Sind daher r und ϱ die Radien (oder d und δ die Durchmesser) einer Hohlkugel, so wird

$$v = \frac{4}{3}\pi(r^3 - \varrho^3) = \frac{1}{6}\pi(d^3 - \delta^3).$$

§. 384.

Aufg. Den Kubikinhalt eines Kugelsectors zu finden, wenn der Kugelradius r und entweder I. die Höhe h der zugehörigen Calotte, oder II. der Radius ϱ der letztern gegeben ist.

Aufl. I. $v = \frac{2}{3}r^2\pi h$. — II. $v = \frac{2}{3}r^2\pi(r \mp \sqrt{r^2 - \varrho^2})$.

Bew. I. Wie §. 383. ergibt sich, daß man den Sector als eine Pyramide betrachten kann, deren Basis die Calotte, und Höhe der Kugelradius ist. Nun ist der Inhalt der Calotte $2r\pi h$ (§. 368.); daher

$$v = 2r\pi h \, . \, \frac{1}{3}r = \frac{2}{3}r^2\pi h = \frac{1}{6}d^2\pi h.$$

II. Es ist in dem rechtwinkligen $\triangle$ CLK (Fig. 184.):

$$\overline{CL}^2 = \overline{CK}^2 - \overline{KL}^2, \text{ oder } (r - h)^2 = r^2 - \varrho^2; \text{ also}$$

$$r - h = \pm\sqrt{r^2 - \varrho^2}, \text{ folglich } h = r \mp \sqrt{r^2 - \varrho^2}.$$

Dieser Werth in die Formel I. substituirt, gibt die Formel II.

Zus. Für den körperlichen Inhalt eines pyramidalen Sectors ergibt sich durch dieselbe Betrachtung $v = \frac{1}{3}br = \frac{1}{3}r \, . \, b$. Substituirt man statt b seinen Werth aus §. 370, Zus., so folgt

$$v = \frac{r^3\pi}{540}(S - (n - 2)\,180).$$

§. 385.

Aufg. Den körperlichen Inhalt eines **Kugelsegmentes** zu berechnen, wenn I. seine Höhe und der Kugelradius, II. die Höhe und der Radius (ϱ) der Basis des Segmentes gegeben ist.

Aufl. $\begin{cases} \text{I. } v = \frac{1}{3}h^2\pi(3r - h) = h^2\pi(r - \frac{1}{3}h). \\ \text{II. } v = \frac{1}{6}h\pi(3\varrho^2 + h^2) = \frac{1}{2}h\pi(\varrho^2 + \frac{1}{3}h^2). \end{cases}$

Bew. I. Es ist der Inhalt des Segmentes HNK (Fig. 184.) gleich der Differenz zwischen dem Sector CHNK und dem Kegel CHK. Nun ist der Inhalt des Sectors CHNK $= \frac{2}{3}r^2\pi h$, und der des Kegels CHK $= \frac{1}{3}\pi.\overline{HL}^2.CL$; somit

$v = \frac{2}{3}r^2\pi h - \frac{1}{3}\pi.\overline{HL}^2.CL = \frac{1}{3}\pi(2r^2h - \overline{HL}^2.CL)$.

Es ist aber $CL = CN - LN = r - h$, und $\overline{HL}^2 = LM.LN = h(2r - h)$, mithin

$$v = \frac{1}{3}\pi(2r^2h - h(2r - h)(r - h)) = \frac{1}{3}h\pi(3rh - h^2)$$
$$= \frac{1}{3}h^2\pi(3r - h).$$

II. Da für diesen Fall $HL = \varrho$ und $LN = h$ ist, so hat man zur Bestimmung des Kugelradius

$\overline{CH}^2 = \overline{CL}^2 + \overline{HL}^2$, oder $r^2 = (r - h)^2 + \varrho^2$, woraus
$r = (\varrho^2 + h^2) : 2h$ folgt.

Dieser Werth in die Nr. I. gefundene Gleichung substituirt, gibt

$$v = \frac{h^2\pi}{3}\left(\frac{3(\varrho^2 + h^2)}{2h} - h\right)$$
$$= \frac{1}{6}h\pi(3\varrho^2 + h^2).$$

Zus. Sind r und ϱ gegeben, so findet man $h = r \mp \sqrt{r^2 - \varrho^2}$. Substituirt man diesen Werth in die Gleichung II,, so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$v = \frac{1}{3}\pi[2r^3 \mp (2r^2 + \varrho^2)\sqrt{r^2 - \varrho^2}].$$

§. 386.

Aufg. Den Kubikinhalt einer **Kugelscheibe** aus den Radien ihrer Grundkreise und der Zonendicke zu berechnen.

Aufl. Sind ϱ und ϱ_1 die Radien der Grundflächen, h die Höhe der Scheibe, so ist

$$v = \frac{1}{6}h\pi[3(\varrho^2 + \varrho_1^2) + h^2] = \frac{1}{2}h\pi(\varrho^2 + \varrho_1^2 + \frac{1}{3}h^2).$$

Bew. Erweitert man die Scheibe ABGF (Fig. 184.) zum Kugelsegmente BMG, zieht die Achse MN, und setzt die Höhe des Ergänzungssegmentes DM = x; so ist der Inhalt der Scheibe gleich der Differenz der Inhalte der Segmente BMG und AMF, von denen das erstere h + x, das letztere x zur Höhe hat. Es wird daher (nach §. 385, II.):

$$v = \frac{1}{6}\pi(h + x)[3\varrho^2 + (h + x)^2] - \frac{1}{6}\pi x(3\varrho_1^2 + x^2),$$

woraus man nach gehöriger Reduktion erhält:

$$\text{a)}\ v = \frac{1}{6}\pi[3\varrho^2 h + 3x(\varrho^2 - \varrho_1^2 + h^2) + 3hx^2 + h^3].$$

Legt man durch die Achse MN eine Ebene, so ist der Schnitt ein größter Kreis, schneidet die Grundflächen der Scheibe in den Durchmessern AF und BG (§. 353.), und es ist (§. 225, Zus. 2.):

$DM.DN = \overline{AD}^2$, oder	$EM.EN = \overline{BE}^2$ oder
1) $x(2r - x) = \varrho_1^2$; dann	2) $(h + x)(2r - x - h) = \varrho^2$.

Substituirt man den Werth von $2r - x = \frac{\varrho_1^2}{x}$ aus 1) in 2), so wird

$$(h + x)(\varrho_1^2 - hx) = \varrho^2 x; \text{ oder}$$
$$\varrho_1^2 h + \varrho_1^2 x - h^2 x - hx^2 = \varrho^2 x; \text{ also}$$
$$\varrho_1^2 h = x(\varrho^2 - \varrho_1^2 + h^2) + hx^2, \text{ daher auch}$$
$$3\varrho_1^2 h = 3x(\varrho^2 - \varrho_1^2 + h^2) + 3hx^2.$$

Setzt man nun in die Gleichung a) die erste Seite der eben entwickelten, statt der in jener vorkommenden zweiten, so wird nach Herausstellung des Faktors h:

$$v = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + 3\varrho_1^2 + h^3).$$

Zus. 1. Ist die eine Grundfläche der Scheibe ein Hauptkreis, also $\varrho = r$, so wird $\varrho_1^2 = r^2 - h^2$, und man erhält durch Substitution dieser Werthe in vorstehende Formel:

$$v = \frac{1}{3}h\pi(3r^2 - h^2) = h\pi(r^2 - \frac{1}{3}h^2).$$

Zus. 2. Ist $\varrho_1 = \varrho$, also der Mittelpunkt der Scheibe zugleich der der Kugel, so erhält man:

$$v = \frac{1}{6}h\pi(6\varrho^2 + h^2) = h\pi(\varrho^2 + \frac{1}{6}h^2).$$

Zus. 3. Nimmt man aus einer Scheibe, bei welcher $\varrho_1 = \varrho$, einen Cylinder mit dem Radius ϱ und der Höhe h heraus, so ist der Inhalt des übrig bleibenden Kugelringes, nämlich

$$v = \pi h(\varrho^2 + \frac{1}{6}h^2) - \varrho^2\pi h = \frac{1}{6}h^3\pi, \text{ d. h. } -?$$

Hieraus folgt zugleich, daß alle Kugelringe von gleichen Höhen gleichen Inhalt haben, wie verschieden auch die Kugeln sein mögen.

Zus. 4. Wird aus einer Scheibe, bei welcher $\varrho > \varrho_1$, ein Cylinder mit der Höhe h und dem Radius ϱ_1 herausgenommen, so bleibt ein sogenannter Wulst übrig, für welchen sich ergibt

$$v = \tfrac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + 3\varrho_1{}^2 + h^2) - \varrho_1{}^2\pi h$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 - 3\varrho_1{}^2 + h^2) = \tfrac{1}{2}\pi h(\varrho^2 - \varrho_1{}^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

Zus. 5. Nimmt man aus einer Scheibe einen abgekürzten Kegel, dessen Radien ϱ und ϱ_1, und Höhe h ist, heraus, so bleibt ein schiefer Kugelring, für den

$$v = \tfrac{1}{6}h\pi(3\varrho^2 + 3\varrho_1{}^2 + h^2) - \tfrac{1}{3}h\pi(\varrho^2 + \varrho\varrho_1 + \varrho_1{}^2)$$
$$= \tfrac{1}{6}h\pi[(\varrho - \varrho_1)^2 + h^2]$$ gefunden wird.

§. 387.

Aufg. Den körperlichen Inhalt eines Kugelkeiles zu berechnen, wenn nebst dem Kugelradius die Anzahl der Grade (n) des zugehörigen sphärischen Winkels bekannt ist.

Aufl. u. Bew. Ein keilförmiger Ausschnitt ist der sovielte Theil der ganzen Kugel, als der Neigungswinkel (n) seiner Seitenflächen ein Theil von 360° ist. Es ist daher sein Inhalt

$$v = \frac{4r^3\pi}{3} \cdot \frac{n}{360} = \frac{r^3\pi n}{270}.$$

§. 388.

Aufg. Einen irregulären Körper zu berechnen, der nicht zu den bisher betrachteten gehört.

Aufl. I. Man zerlege denselben durch Schnitte in Pyramiden und Prismen, berechne die einzelnen Theile; so ist die Summe der gefundenen Inhalte das gesuchte Volumen.

II. Einen ebenflächigen Körper kann man sich auch dadurch in lauter Pyramiden zerlegt denken, daß man innerhalb desselben einen Punkt annimmt, und diesen als gemeinschaftlichen Scheitel von so vielen Pyramiden betrachtet, als der Körper Grenzflächen hat. In diesem Falle ist dann der Kubikinhalt des Körpers gleich dem dritten Theile seiner Oberfläche multiplizirt mit der Summe der Abstände aller Grenzflächen von jenem Punkte.

§. 389.

Lehrsätze. Um den Kubikinhalt von Körpern zu bestimmen, die sich nicht zerlegen oder sonst bequem nach bisher behandelten Sätzen berechnen lassen, gibt es verschiedene Methoden, welche jedoch auf Gesetzen der Physik beruhen. Solche Gesetze sind:

I. In dem Raume, welchen ein Körper einnimmt, kann nicht zugleich ein anderer sein. Demnach muß also eine Flüssigkeit (z. B. Wasser) in einem Gefäße sinken, wenn ein sich darin befindender Körper herausgenommen wird.

II. Jeder Körper verliert im Wasser gewogen so viel von seinem Gewichte, als die von ihm verdrängte Wassermenge wiegt; also ist sein Gewichtsverlurst das Gewicht eines gleich großen Wasserkörpers.

III. Haben zwei Körper einerlei Masse (Menge der Materie), so verhalten sich ihre Volumina, wie ihre Gewichte.

Man unterscheidet absolutes und spezifisches Gewicht. Absolutes Gewicht eines Körpers ist jenes, das er in Bezug auf eine bestimmte Gewichtseinheit (ohne Rücksicht auf sein Volumen, auf einer Wage gewogen) hat; spezifisches Gewicht dagegen ist die Zahl, welche angibt, in welchem Verhältnisse ein Volumen eines Körpers zu einem ebenso großen Volumen eines andern, als Einheit angenommenen, steht. Als Einheit zur Bestimmung spezifischer Gewichte dient reines Wasser. Bezeichnet man daher das spezifische Gewicht eines Körpers allgemein durch s, und sagt z. B. für Silber ist $s = 10{\cdot}5$, so heißt dieß, irgend ein Volumen Silber (z. B. 1 c″) verhält sich zu demselben Volumen Wasser (d. i. auch 1 c″), wie $10{\cdot}5 \div 1$, oder das Silber ist 10·5 mal so schwer als Wasser.

§. 390.

Aufg. Den Kubikinhalt eines Körpers nach den §. 389. angeführten Gesetzen zu berechnen.

Aufl. I. Man nehme ein Gefäß, das etwa die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds oder eines geraden Cylinders hat, und dessen Inhalt (Capazität) man genau kennt, lege in dasselbe den zu berechnenden Körper, fülle hierauf das Gefäß mit Wasser oder einer andern die Materie des Körpers nicht angreifenden Substanz, und nehme dann den Körper vorsichtig heraus; so ist der Unterschied zwischen dem Volumen des Gefäßes und dem Inhalte der sich jetzt noch im Gefäße befindenden Substanz der ge-

suchte Kubikinhalt; also wenn bh das erstere, und bh′ den letztern bezeichnet: $v = bh - bh' = b(h - h')$.

II. Man wäge den zu berechnenden Körper auf einer Wage in der Luft und im Wasser. Ist im erstern Falle, in Pfunden ausgedrückt, sein Gewicht P, im letztern p, so ist der Gewichtsverlust $= P - p$, und dieser ist das Gewicht des Wasserkörpers von demselben Volumen (v). Nun weiß man aber, daß das Gewicht von 1c′ Wasser 44 Pfund 12 Loth = 44·375 Pfund beträgt; also ist (§. 389, III.):

$$1c' \div v = 44.375 \div (P - p); \text{ daher } v = \frac{P - p}{44{\cdot}375} c'.$$

III. Man wäge den zu berechnenden Körper auf einer Wage, so erhält man sein absolutes Gewicht (in Pfunden) P. Ist nun das spezifische Gewicht des Körpers s, so wiegt ein Kubikfuß desselben 44·375 s ℔, und es ist daher für sein Volumen (v):

$$1c' \div v = 44.375 s \div P; \text{ also}$$

$$1) \; v = \frac{P}{44{\cdot}375 s} c', \text{ und umgekehrt } \quad 2) \; P = v \,.\, 44{\cdot}375 s.$$

Diese Methode ist die gebräuchlichste, und man hat eigene Tafeln angefertigt, welche die spezifischen Gewichte verschiedener Körper enthalten.

Anm. Aus der Verbindung, der in II. und III. gefundenen Gleichungen folgt:

$$\text{I. } P - p = \frac{P}{s}; \text{ daher } \quad \text{II. } s = \frac{P}{P - p}; \text{ ferner}$$

$$\text{III. } p = \frac{P}{s}(s - 1), \text{ und } \quad \text{IV. } P = \frac{sp}{s - 1}, \text{ d. h. } -?$$

Anhang. Messung der regulären und solcher Körper, die durch Umdrehung regulärer Polygone entstehen.

§. 391.

Lehrs. Errichtet man in den Polygonsmittelpunkten zweier anstoßender Grenzflächen eines regulären Polyeders senkrechte Linien; so schneiden sich diese in einem Punkte, welcher I. von allen Grenzflächen und II. von allen Ecken des Körpers gleichweit entfernt ist.

Dat. $AC \perp GN$, und $BC \perp GJ$ (Fig. 187.).

Thes. I. $AC = BC = DC \ldots$; II. $CG = CH = CK \ldots$.

Bew. I. Es seien A, B, D... die Mittelpunkte der Grenzflächen eines regulären Polyeders. Halbirt man die Kante GH in E,

und zieht AE und BE, so ist $\measuredangle$ AEH = BEH = R (§. 239, Zus. 4.); daher $\measuredangle$ AEF der Neigungswinkel der Ebenen IGN und GJ, die auch, weil EH $\perp$ pl. AEB ist (§. 292, Zus. 1.) pl. AEB senkrecht stehen (§. 300.). AC und BC liegen somit in einer Ebene, nämlich der des Neigungswinkels (§. 300, Zus. 2.), müssen sich also zwischen den Schenkeln des hohlen Winkels AEB schneiden (§. 47.).

Zieht man noch CE, so sind die rechtwinkligen Dreiecke ACE und BCE congruent (IV.); folglich AC = BC und $\measuredangle$ AEC = BEC = $\frac{1}{2}$ AEB.

Werden ferner nach dem Halbirungspunkte F der Kante JK die Geraden BF und DF, dann nach CD und CF gezogen; so ist $\measuredangle$ BFD der Neigungswinkel der Grenzflächen GJ und JP, und es liegen daher (aus demselben Grunde wie oben) BC und CD in einer Ebene, in der auch CF liegt. Ferner ist $\triangle$ BCE $\cong$ BCF (I.); folglich CE = CF und $\measuredangle$ BEC = BFC = $\frac{1}{2}$ AEB = $\frac{1}{2}$ BFD, da die Seitenflächen des Polyeders gleiche Neigung gegen einander haben, und daher auch $\triangle$ BFC $\cong$ CFD (I.); mithin CD = BC = AC.

Auf gleiche Weise läßt sich der Beweis für jede drei aufeinanderfolgende Seitenflächen führen; also ist der Punkt C von allen Grenzflächen gleichweit entfernt.

II. Da GH $\perp$ pl. AEB und JK $\perp$ pl. BFD, so ist $\measuredangle$ CEH = CEG = CFK = CFJ = R, ferner CE = CF und EH = EG = FK = FJ, mithin $\triangle$ CEH $\cong$ CEG $\cong$ CFK $\cong$ CFJ; also auch CH = CG = CK = CF.

Ebenso läßt sich zeigen, daß C von allen übrigen Ecken die gleiche Entfernung hat.

Zus. Jedem regulären Polyeder kann also eine Kugel sowohl ein= als auch umgeschrieben werden, und zwar sind beide concentrisch. Der Mittelpunkt dieser Kugeln heißt auch der **Mittelpunkt des Polyeders.**

§. 392.

Lehrs. Jeder reguläre Körper ist seinem Inhalte nach einer Pyramide gleich, welche des Polyeders Oberfläche als Basis und den Radius der eingeschriebenen Kugel als Höhe hat.

Bew. Denkt man sich aus allen Ecken einer Grenzfläche nach dem Mittelpunkte des Polyeders gerade Linien (Radien der umschriebenen Kugel) gezogen, und durch je zwei aufeinanderfolgende Ebenen gelegt, so entsteht eine gleichseitige Pyramide, deren Basis jene Grenzfläche, und deren Höhe der Radius der eingeschriebenen Kugel ist. Nun kann aber das ganze Polyeder in so viele solche Pyramiden, die alle dieselbe Höhe haben, zerlegt werden, als es Grenzflächen hat; daher wird sein Inhalt offenbar dem dritten Theile des Produktes aus dem Radius der eingeschriebenen Kugel in die Summe aller Grenzflächen, d. i. in die Oberfläche gleich, mithin einer Pyramide von der im Lehrs. angegebenen Beschaffenheit.

§. 393.

Aufg. Die Oberflächen (f) der regulären Körper aus ihrer Kante (a) zu berechnen.

Aufl. u. Bew. I. Das Tetraëder ist von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt; also ist seine Oberfläche (nach §. 181, Zus. II.):

$$f = 4 \cdot \tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = a^2 \sqrt{3} = 1{\cdot}73205\, a^2.$$

II. Für das Oktaëder, welches von acht gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen wird, ist

$$f = 8 \cdot \tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = 2a^2 \sqrt{3} = 3{\cdot}4641\, a^2.$$

III. Das Ikosaëder hat 20 gleichseitige Dreiecke zur Begrenzung; daher ist seine Oberfläche

$$f = 20 \cdot \tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = 5a^2 \sqrt{3} = 8{\cdot}66025\, a^2.$$

IV. Des Hexaëders Begrenzung bilden sechs Quadrate; mithin ist $f = 6a^2$.

V. Des Dodekaëders Oberfläche besteht aus 12 regulären Fünfecken; also ist (§. 265, Zus.)

$$f = 12 \cdot \tfrac{5}{4} a^2 \sqrt{1 + 0{\cdot}4\sqrt{5}}$$

$$= 15a^2 \sqrt{1 + 0{\cdot}4\sqrt{5}} = 20{\cdot}64573\, a^2. \text{ *)}$$

*) In den nachfolgenden Untersuchungen bezeichnet durchgängig ϱ den Radius des Kreises, der um eine Grenzfläche des Polyeders beschrieben werden kann, R den Halbmesser der dem Körper umschriebenen, r den der eingeschriebenen Kugel, f die Oberfläche und v den körperlichen Inhalt.

§. 394.

Aufg. Aus der Kante (a) eines **Tetraëders** I. den Radius der umschriebenen, II. den der eingeschriebenen Kugel und III. den körperlichen Inhalt zu finden.

Aufl. u. Bew. I. Da alle Ecken des **Tetraëders** in der Oberfläche der umschriebenen Kugel liegen, so ist jede Grenzfläche BED (Fig. 188.) ein in einen kleinern Kugelkreis eingeschriebenes reguläres Dreieck, und das aus A auf pl. BED gefällte Loth AG geht durch das Centrum F dieses Kreises (§. 336, Zus. 1.), also auch durch den Mittelpunkt C der Kugel (§. 352, Zus. 1.). Ist nun $EF = \varrho$ der Radius dieses Kreises, so hat man (nach §. 249, Zus. I.) $a = \varrho\sqrt{3}$, also $\varrho = a : \sqrt{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

Da ferner $AG \perp$ pl. BED, so ist auch $EF \perp AG$; mithin

$$AG \div AE \div AF, \text{ oder } 1)\ 2R \div a \div AF.$$

Es ist aber in dem rechtwinkligen $\triangle AEF$:

$$AF = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{EF}^2} = \sqrt{a^2 - \varrho^2} = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{3}a^2} = a\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{1}{3}a\sqrt{6}.$$

Dieser Werth in vorstehende Proportion 1) substituirt gibt

$$R = \tfrac{1}{2}a^2 : \tfrac{1}{3}a\sqrt{6} = \tfrac{1}{4}a\sqrt{6} = 0{\cdot}61237\,a.$$

II. Der Radius CF der eingeschriebenen Kugel ist Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes CEF, das $CE = R$ als Hypotenuse und $EF = \varrho$ als andere Kathete hat; mithin wird durch Substitution der Werthe von R und ϱ:

$$r^2 = \tfrac{3}{8}a^2 - \tfrac{1}{3}a^2 = \tfrac{1}{24}a^2, \text{ und daher}$$

$$r = \tfrac{1}{12}a\sqrt{6} = 0{\cdot}20412\,a.$$

III. Hinsichtlich des Volumens hat man, wenn die Oberfläche durch f bezeichnet wird, $v = \frac{1}{3}r\,.\,f$ (§. 392.). Substituirt daher für r und f ihre durch a ausgedrückten Werthe, so wird

$$v = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{12}a\sqrt{6}\,.\,a^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{12}a^3\,.\sqrt{2} = 0{\cdot}11785\,a^3.$$

Anm. Dieses Resultat erhält man auf anderm Wege, wenn man das Tetraëder als eine reguläre Pyramide betrachtet, deren Basis $BED = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, und Höhe $AF = \sqrt{a^2 - \varrho^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$ ist.

§. 395.

Aufg. Aus der Kante (a) eines Oktaëders I. den Radius der umschriebenen, II. den der eingeschriebenen Kugel, und III. den körperlichen Inhalt zu bestimmen.

Aufl. u. Bew. I. Zieht man (Fig. 189.) die Gerade AD, so ist diese ein Diameter der umschriebenen Kugel, und steht auf pl. FG in dessen Polygonsmittelpunkt, welcher zugleich das Kugelcentrum ist, senkrecht. Zieht man noch BC, so ist $\measuredangle ACB = R$, und daher

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2, \text{ oder } R^2 + R^2 = a^2; \text{ mithin}$$
$$R = \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} = 0{\cdot}70711\,a.$$

II. Fällt man $CH \perp$ pl. ABF, und zieht $BH = \varrho$, so ist
$$\overline{CH}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BH}^2, \text{ oder } r^2 = R^2 - \varrho^2.$$

Nun ist aber $R^2 = \frac{1}{2}a^2$ und $\varrho^2 = \frac{1}{3}a^2$ (§. 249, Zus. I.); mithin wird
$$r = \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{3}a^2} = \sqrt{\tfrac{1}{6}a^2} = \tfrac{1}{6}a\sqrt{6} = 0{\cdot}40825\,a.$$

III. In Hinsicht auf den körperlichen Inhalt hat man $v = \frac{1}{3}r.f$; daher durch Substitution der Werthe von r und von $f = 2a^2\sqrt{3}$:
$$v = \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{6}a\sqrt{6}.2a^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}a^3\sqrt{2} = 0{\cdot}4714\,a^3.$$

Anm. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man das Oktaëder als eine reguläre Doppelpyramide betrachtet, deren Basis $FG = a^2$ und Höhe $AD = a\sqrt{2}$ ist.

§. 396.

Aufg. Aus der Kante (a) eines Ikosaëders I. den Radius der umschriebenen, II. den der eingeschriebenen Kugel, und III. den kubischen Inhalt zu berechnen.

Aufl. u. Bew. I. Legt man durch die Endpunkte der in einer Ecke A (Fig. 190.) zusammenstoßenden Kanten eine Ebene, so entsteht eine reguläre Pyramide, deren Basis das Fünfeck BDEFG ist. Fällt man $AL \perp$ pl. EG, so trifft sie diese Ebene im Polygonsmittelpunkte H, und wird ein Diameter der umschriebenen Kugel. Zieht man in pl. EG noch die Gerade BH, so wird

$$AL \div AB \div AH, \text{ oder } 1)\ 2R \div a \div AH.$$

Es ist aber $\overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2$, oder (§. 251, Zus. I, b.)

$$\overline{AH}^2 = a^2 - \tfrac{1}{4}a^2(2+0{\cdot}4\sqrt{5})$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2(2-0{\cdot}4\sqrt{5}); \text{ folglich}$$
$$AH = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2-0{\cdot}4\sqrt{5}}.$$

Dieser Werth von AH in obige Proportion 1) substituirt gibt:

$$R = \tfrac{1}{2}a^2 : \tfrac{1}{2}a\sqrt{2-0{\cdot}4\sqrt{5}} = a\sqrt{\frac{2+0{\cdot}4\sqrt{5}}{3{\cdot}2}}$$
$$= \tfrac{1}{4}a\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{\cdot}95106\,a.$$

II. Fällt man CK $\perp$ pl. AEF, und zieht AK d. i. den Radius des um $\triangle$AEF beschriebenen Kreises, so ist

$$\overline{CK}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AK}^2 \text{ oder } r^2 = R^2 - \varrho^2;$$

daher wird durch Substitution der Werthe von R und ϱ:

$$r^2 = \tfrac{1}{16}a^2(10+2\sqrt{5}) - \tfrac{1}{3}a^2 = \tfrac{1}{48}a^2(14+6\sqrt{5}); \text{ mithin}$$
$$r = \tfrac{1}{4}a(3+\sqrt{5}).\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 0{\cdot}75576\,a.$$

III. Durch Substitution der Werthe von r und f in die Formel $v = \frac{1}{3}r.f$ wird der körperliche Inhalt des Ikosaëders

$$v = \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{4}a(3+\sqrt{5}).\sqrt{\tfrac{1}{3}}.5a^2\sqrt{3}$$
$$= \tfrac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}) = 2{\cdot}1817\,a.$$

§. 397.

Aufg. Aus der Kante eines Hexaëders I. den Radius der umschriebenen, II. den der eingeschriebenen Kugel, III. den körperlichen Inhalt zu finden.

Aufl. u. Bew. I. Die Diagonale DF (Fig. 191.) eines Diagonalschnittes geht durch den Mittelpunkt des Hexaëders und ist ein Diameter der umschriebenen Kugel, zugleich Hypotenuse des $\triangle$ADF, das AF = a und die Diagonale eines begrenzenden Quadrates, nämlich $AD = a\sqrt{2}$ als Katheten hat. Daher wird

$$(2R)^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2, \text{ woraus}$$
$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = 0{\cdot}86603\,a \text{ folgt.}$$

II. Der Radius der eingeschriebenen Kugel ist offenbar die halbe Seite des Hexaëders, also $r = \frac{1}{2}a$, was sich auch durch Sub-

stitution der Werthe von $R = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ und $\varrho = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ (§. 240, Zus.) in die Formel $r^2 = R^2 - \varrho^2$ ergibt.

III. Substituirt man die Werthe von $r = \frac{1}{2} a$ und $f = 6 a^2$ in die Gleichung $v = \frac{1}{3} r . f$, so wird

$$v = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} a . 6 a^2 = a^3.$$ (Vgl. §. 376, Zus.)

§. 398.

Aufg. Aus der Kante (a) eines Dodekaëders I. den Halbmesser der umschriebenen, II. den der eingeschriebenen Kugel, III. den körperlichen Inhalt zu bestimmen.

Aufl. u. Bew. I. Zieht man in drei anstoßenden Seitenflächen (Fig. 192.) die Diagonalen, BD, BE und DE, so bilden diese ein gleichseitiges $\triangle$ BDE, das zugleich Basis der gleichseitigen Pyramide ABDE ist. Da nun $\measuredangle BAD = 108^0 = \frac{6}{5} R$, so ist (nach §. 242, Zus. II.) $AB = a = \frac{1}{2} BD (\sqrt{5} - 1)$; mithin $BD = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} + 1)$.

Fällt man nun aus A eine Senkrechte auf pl. BDE, so geht sie durch den Mittelpunkt F des um das $\triangle$ BDE beschriebenen Kreises, und wird ein Diameter der um das Dodekaëder beschriebenen Kugel. Zieht man noch BF, so ist (nach §. 249, Zus. I.) $BD = BF . \sqrt{3}$, also $BF = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{a(\sqrt{5} + 1)}{2\sqrt{3}}$.

Da $BF \perp AG$, so hat man ferner

$$AG \div AB \div AF, \text{ oder 1) } 2R \div a \div AF.$$

Es ist aber $\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BF}^2$, oder

$$= a^2 - \left(\frac{a(\sqrt{5} + 1)}{2\sqrt{3}}\right)^2, \text{ woraus}$$

$$AF = a \sqrt{\tfrac{1}{6}(3 - \sqrt{5})} \text{ folgt.}$$

Dieser Werth von AF in obige Proportion 1) gesetzt gibt

$$R = \tfrac{1}{2} a^2 : a \sqrt{\tfrac{1}{6}(3 - \sqrt{5})} = \tfrac{1}{2} a \sqrt{\tfrac{6}{4}(3 + \sqrt{5})}$$

$$= \tfrac{1}{4} a \sqrt{18 + 6\sqrt{5}} = 1{\cdot}40126\, a.$$

II. Setzt man den eben erhaltenen Werth von R, und den von $\varrho = \frac{1}{2} a \sqrt{2 + 0{\cdot}4 \sqrt{5}}$ (§. 251, Zus. 1.) in $r^2 = R^2 - \varrho^2$, so wird

$$r^2 = \tfrac{1}{16} a^2 (18 + 6\sqrt{5}) - \tfrac{1}{4} a^2 (2 + 0{\cdot}4\sqrt{5})$$
$$= \tfrac{1}{16} a^2 (10 + 4{\cdot}4\sqrt{5}); \text{ also}$$
$$r = \tfrac{1}{4} a \sqrt{10 + 4{\cdot}4\sqrt{5}} = 1{\cdot}11352\, a.$$

III. Die Werthe von r und $f = 15 a^2 \sqrt{1 + 0{\cdot}4\sqrt{5}}$ in die Formel $v = \frac{1}{3} r \, . \, f$ substituirt geben endlich

$$v = \tfrac{1}{3} . \tfrac{1}{4} a \sqrt{10 + 4{\cdot}4\sqrt{5}} \, . \, 15 a^2 \sqrt{1 + 0{\cdot}4\sqrt{5}}$$
$$= \tfrac{5}{4} a^2 \sqrt{18{\cdot}8 + 8{\cdot}4\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4} a^3 \sqrt{470 + 210\sqrt{5}}$$
$$= \tfrac{1}{4} a^3 (15 + 7\sqrt{5}) = 7{\cdot}66312\, a^3.$$

Zus. Bezeichnet man den Inhalt einer Seitenfläche eines regulären Polyeders durch m, und behält die übrigen bisher gebrauchten Bezeichnungen bei, so erhält man folgende Tabelle:

?	Tetr.	Oct.	Icosaëder.	Hex.	Dodecaëder.
m	$\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$	$\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$	$\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$	a^2	$\frac{5}{4} a^2 \sqrt{1 + 0{\cdot}4\sqrt{5}}$
ϱ	$\frac{1}{3} a \sqrt{3}$	$\frac{1}{3} a \sqrt{3}$	$\frac{1}{3} a \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} a \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} a \sqrt{2 + 0{\cdot}4\sqrt{5}}$
R	$\frac{1}{4} a \sqrt{6}$	$\frac{1}{2} a \sqrt{6}$	$\frac{1}{4} a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2} a \sqrt{3}$	$\frac{1}{4} a \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$
r	$\frac{1}{12} a \sqrt{6}$	$\frac{1}{6} a \sqrt{6}$	$\frac{1}{12} a \sqrt{42 + 18\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2} a$	$\frac{1}{4} a \sqrt{10 + 4{\cdot}4\sqrt{5}}$
f	$a^2 \sqrt{3}$	$2 a^2 \sqrt{3}$	$5 a^2 \sqrt{3}$	$6 a^2$	$15 a^2 \sqrt{1 + 0{\cdot}4\sqrt{5}}$
v	$\frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$	$\frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$	$\frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5})$	a^3	$\frac{1}{4} a^3 (15 + 7\sqrt{5})$

Anm. Mittelst dieser Tafel läßt sich die Kante a durch ϱ, R, r rc., mithin auch die Oberfläche und das Volumen der regulären Polyeder durch

einen der Radien (oder Diameter), und umgekehrt bestimmen, überhaupt jedes der darin vorkommenden Stücke, sobald nur eines derselben bekannt ist.

§. 399.

Aufg. Die Oberfläche (f) desjenigen Körpers zu finden, welcher durch Umdrehung eines halben regulären Polygons um die dasselbe halbirende Gerade (Drehungsachse) entsteht.

Aufl. Ist ϱ die Entfernung einer Seite vom Polygonsmittelpunkte (der Radius des dem Polygon eingeschriebenen Kreises), h die Länge der Drehungsachse, so erhält man, je nachdem die Seitenzahl des Polygons I. gerade oder II. ungerade ist:

$$\text{I. } f = 2\varrho\pi h; \quad \text{II. } f = h^2\pi.$$

Bew. I. Hat das Polygon ABDE...(Fig. 183.) eine gerade Anzahl von Seiten, so geht die Drehungsachse durch zwei diametral gegenüberstehende Ecken desselben, und es beschreiben die erste und letzte (an die Achse stoßende) Seite des Polygons die Mäntel vollständiger, alle übrigen Seiten aber die Mäntel abgekürzter Kegel. Ist nun h die Länge der Drehungsachse, ϱ das Perpendikel aus dem Polygonsmittelpunkte auf eine Seite, so erhält man (ganz wie §. 367.): $f = 2\varrho\pi h$.

II. Ist die Seitenzahl des Polygons ungerade, so geht die aus einer Ecke A (Fig. 194.) durch den Polygonsmittelpunkt C gezogene Drehungsachse durch den Halbirungspunkt F der diametral gegenüberstehenden Seite, und es ist $CF \perp EF$. Dreht sich nun die Figur ABDEF um AF, so beschreiben die ganzen Seiten Kegelmäntel, deren Summe den Inhalt $= 2CG\pi . AF = 2\varrho\pi h$ hat, die halbe Seite EF aber einen Kreis, dessen Inhalt $= \overline{EF}^2\pi$ ist. Es wird daher $f = 2\varrho\pi h + \overline{EF}^2\pi$.

Beschreibt man nun um das Polygon einen Kreis, und verlängert CF bis an die Peripherie desselben, und setzt $FL = x$, so hat man

$$AF \div EF \div FL; \text{ also } \overline{EF}^2 = AF . FL = hx.$$

Ferner ist $AF = AC + CF = CL + CF$, d. i. $h = \frac{1}{2}(h + x) + \varrho$. Hieraus folgt $x = h - 2\varrho$; mithin wird

$$\overline{EF}^2 = h(h - 2\varrho), \text{ und daher}$$

$$f = 2\varrho\pi h + \pi h(h - 2\varrho) = h^2\pi.$$

§. 400.

Aufg. Den körperlichen Inhalt (v) desjenigen Körpers zu finden, der durch Umdrehung eines halben regulären Polygons entsteht.

Aufl. Ist h die Länge der Drehungsachse, ϱ die Senkrechte vom Polygonsmittelpunkte auf eine Seite, so findet man, je nachdem die Seitenzahl des Polygons I. gerade oder II. ungerade ist:

$$\text{I. } v = \tfrac{2}{3}\varrho^2\pi h; \quad \text{II. } v = \tfrac{1}{3}h^2\varrho\pi.$$

Bew. I. Bei gerader Seitenzahl des Polygons, die 4n sein mag, treffen auf einen Quadranten des um dasselbe beschriebenen Kreises n Seiten (Fig. 193.). Zieht man aus C nach allen Ecken gerade Linien, so erhält man n nebeneinander liegende Dreiecke, die den vierten Theil des Polygons ausmachen. Dreht sich nun das $\triangle ABC$ um die Seite AB, so beschreibt es einen Doppelkegel, dessen gemeinschaftliche Basis der von $BF \perp AC$ beschriebene Kreis ist. Bezeichnet man daher den Inhalt des entstandenen Körpers durch v_1, so hat man

$$\text{a) } v_1 = \tfrac{1}{3}\pi . \overline{BF}^2 . AC \text{ (§. 380, Zus. 3.).}$$

Halbirt man AB in G und zieht CG, so ist $CG = \varrho$, dann $\triangle ABF \sim ACG$ (§. 149, Zus. 1.); daher

$$BF \div AF = CG \div AG, \text{ und}$$
$$BF \div AB = CG \div AC; \text{ mithin}$$
$$\overline{BF}^2 \div AB . AF = \overline{CG}^2 \div AC . AG \text{ oder}$$
$$= \overline{CG}^2 \div AC . \tfrac{1}{2}AB, \text{ also}$$
$$\overline{BF}^2 \div AF = 2 . \overline{CG}^2 \div AC; \text{ und daher}$$
$$\overline{BF}^2 . AC = 2 . \overline{CG}^2 . AF = 2\varrho^2 . AF.$$

Dieser Werth für $\overline{BF}^2 . AC$ in a) substituirt gibt

$$\text{1) } v_1 = \tfrac{2}{3}\varrho^2\pi . AF.$$

Um den Inhalt v_2 des Körpers zu finden, der durch Rotation des $\triangle BDC$ entsteht, verlängere man die Seite DB, bis sie die Verlängerung von CA in H schneidet, so beschreibt das $\triangle CDH$ wieder einen Doppelkegel, dessen Basis der von DK beschriebene Kreis ist. Zieht man vom Inhalte dieses Kegels den durch Rotation des $\triangle CBH$ entstandenen ab, so hat man

$$v_2 = \tfrac{1}{3}\pi . \overline{DK}^2 . CH - \tfrac{1}{3}\pi . \overline{BF}^2 . CH$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi . CH (DK + BF)(DK - BF).$$

Halbirt man DB in L, und zieht CL, dann LM $\perp$ AC und BN $\perp$ DK, so ist DK + BF = 2.LM (§. 144, II.) und DK − BF = DN; mithin b) $v_2 = \frac{2}{3}\pi . CH . LM . DN$.

Da ferner $\measuredangle$ BLM + MLC = MLC + LCM = R, so ist

$\measuredangle$ BLM = LCM = BDN (§. 45, III.); also

$\triangle$ HLC $\sim$ LCM $\sim$ BDN; mithin

$$CH \div CL = BD \div DN,$$ ebenso

$$LM \div CL = BN \div BD;$$ daher

$$CH.LM \div \overline{CL}^2 = BN \div DN = FK \div DN,$$ folglich

$$CH.LM.DN = \overline{CL}^2 . FK = \varrho^2 . FK.$$

Dieser Werth in die Gleichung b) substituirt gibt

$$2)\ v_2 = \tfrac{2}{3}\varrho^2\pi . FK.$$

Auf gleiche Weise erhält man für den Körper, der durch Rotation des $\triangle$ DCE entsteht:

$$3)\ v_3 = \tfrac{2}{3}\pi . \overline{CP}^2 . CK = \tfrac{2}{3}\varrho^2\pi . CK \text{ u. s. f.}$$

Es wird somit durch Addition der erhaltenen Gleichungen

$$v_1 + v_2 + v_3 \ldots = \tfrac{2}{3}\varrho^2\pi (AF + FK + CK \ldots) \text{ d. i.}$$

$$v = \tfrac{2}{3}\varrho^2\pi h.$$

II. Hat das Polygon eine ungerade Anzahl von Seiten, so ist (nach I.) der Inhalt des durch Rotation der Figur ABDEC (Fig. 194.) entstandenen Körpers $= \frac{2}{3}\varrho^2\pi . AF = \frac{2}{3}\varrho^2\pi h$. Dazu muß nun noch der durch die Umdrehung des $\triangle$ CEF entstehende Kegel kommen, dessen Inhalt $= \frac{1}{3}\overline{EF}^2 . CF\pi = \frac{1}{3}\pi\varrho . \overline{EF}^2$ ist. Daher wird $v = \frac{2}{3}\varrho^2\pi . h + \frac{1}{3}\varrho\pi . \overline{EF}^2$.

Es ist aber (nach §. 399, II.): $\overline{EF}^2 = h(h - 2\varrho)$; mithin

$$v = \tfrac{2}{3}\varrho^2\pi h + \tfrac{1}{3}\varrho\pi h(h - 2\varrho) = \tfrac{1}{3}h^2\pi\varrho.$$

Zus. Je größer die Seitenzahl des Polygons ist, desto mehr nähert es sich dem umschriebenen Kreise (§. 243, Zus. 1.); wird dieselbe unendlich groß, so verschwindet der Unterschied ganz. Für diesen Fall geht aber ϱ in den Radius des Kreises (r) über, ebenso wird h = 2r; und man erhält in beiden obigen Fällen den Kubikinhalt der Kugel, nämlich $\frac{4}{3}r^3\pi$ (vgl. §. 383.).

III. Theil. Trigonometrie.

§. 401.

Erkl. 1. Die Trigonometrie (im weitern Sinne) ist jener Theil der Geometrie, welcher aus gewissen gegebenen Stücken (Seiten und Winkeln) einer Figur die übrigen, nicht gegebenen Stücke durch Rechnung finden lehrt.

Die Trigonometrie ist eine Verbindung der Arithmetik und Geometrie, also rechnende Geometrie; daher müssen auch in trigonometrischen Aufgaben die bekannten Stücke in Zahlen, d. h. die Linien nach irgend einem Längenmaße, die Winkel im Gradmaße gegeben sein.

2. Gegenstand trigonometrischer Untersuchungen sind:

I. die Goniometrie, welche von der Beziehung, in welcher Linien= und Winkelgrößen zu einander stehen,

II. die Trigonometrie (im engern Sinne), welche von der Anwendung der Goniometrie auf die Ausmessung der Dreiecke handelt.

I. Abschnitt. Goniometrie.

§. 402.

Erkl. 1. Unter Goniometrie versteht man die Lehre von der Vergleichung der Winkel (oder der zugehörigen, d. i. mit beliebigem Radius aus ihrem Scheitel beschriebenen Bogen) mit gewissen, ganz von deren Größe abhängigen geraden Linien.

2. Um Linien und Winkel, welche ungleichartige Größen sind, in eine für Berechnungen taugliche Verbindung zu bringen, gebraucht die Goniometrie statt der Winkel gewisse, durch ihre Größe bestimmte, und aus Linienverhältnissen abgeleitete Zahlenwerthe, welche goniometrische (auch trigonometrische) oder Winkelfunktionen genannt werden.

Die Abhängigkeit der Größe eines Winkels von gewissen Linienverhältnissen, und umgekehrt, ergibt sich leicht aus der Betrachtung ähnlicher (am einfachsten rechtwinkliger) Dreiecke.

Fällt man z. B. aus beliebigen Punkten D, E, F (Fig. 195.) des einen Schenkels eines Winkels $ABC = \alpha$ Lothe auf den andern Schenkel, so ist

$\triangle BDG \sim BEH \sim BFK$ (§. 149, Zus. 1.); mithin

$BD \div DG = BE \div EH = BF \div FK$; also auch

$\frac{DG}{BD} = \frac{EH}{BE} = \frac{FK}{BF}$; ebenso folgt:

$\frac{BG}{BD} = \frac{BH}{BE} = \frac{BK}{BF}$; dann $\frac{DG}{BG} = \frac{EH}{BH} = \frac{FK}{BK}$ rc.

Diese Quotienten bleiben offenbar für denselben Winkel die nämlichen; ändern sich dagegen, sobald der Winkel sich ändert (wie aus Fig. 196. leicht ersichtlich ist, wenn man $AB = BD = BE$ nimmt); beide sind somit gegenseitig von einander abhängig.

I. Kap. Von den goniometrischen Funktionen einfacher Winkel.

§. 403.

Erkl. 1. Fällt man aus einem beliebigen Punkte des einen Schenkels eines Winkels $BAC = \alpha$ (Fig. 197.) ein Loth auf den andern Schenkel, so heißt in dem dadurch entstehenden rechtwinkligen Dreiecke ABC:

I. der Quotient aus (den Maßzahlen) der dem Winkel (α) gegenüberstehenden Kathete ($BC = a$) getheilt durch die Hypotenuse ($AB = c$) der Sinus dieses Winkels, welches Verhältniß dadurch bezeichnet wird, daß man schreibt

$$\frac{BC}{AB} = \sin BAC \text{ oder } \frac{a}{c} = \sin \alpha;$$

II. der Quotient aus der dem Winkel anliegenden Kathete ($AC = b$) dividirt durch die Hypotenuse der Cosinus des Winkels, was bezeichnet wird durch

$$\frac{AC}{AB} = \cos BAC \text{ oder } \frac{b}{c} = \cos \alpha;$$

III. der Quotient aus der dem Winkel gegenüberstehenden

Kathete getheilt durch die anliegende die **Tangente** des Winkels, was man bezeichnet durch

$$\frac{BC}{AC} = \text{tang } BAC \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \text{tang } \alpha = \text{tg } \alpha;$$

IV. der Quotient aus der anliegenden getheilt durch die gegenüberliegende Kathete (also der reciproke Werth der Tangente) die **Cotangente** des Winkels, was bezeichnet wird durch

$$\frac{AC}{BC} = \text{cotg } BAC \quad \text{oder} \quad \frac{b}{a} = \text{cotg } \alpha.$$

Zus. 1. Da im rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse größer ist als jede Kathete, so folgt, daß der Sinus und Cosinus eines Winkels immer echte Brüche sind.

Zus. 2. Das Produkt aus der Tangente und Cotangente eines Winkels ist stets der Einheit gleich. Denn multiplizirt man obige Werthe von tg α und cotg α, so erhält man

I. $\text{tg } \alpha \,.\, \text{cotg } \alpha = 1$. — Hieraus folgt umgekehrt

II. $\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{cotg } \alpha}$, und III. $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$, d. h. —?

Zus. 3. Tangente und Cotangente eines Winkels von 45° sind der Einheit gleich. Denn ist $\alpha = 45^0$, so ist auch $\beta = 45^0$ (§. 77, Zus. 3.), daher $a = b$; folglich

$$\text{tg } 45^0 = 1 = \text{cotg } 45^0.$$

Anm. Außer den oben genannten goniometrischen Funktionen sind noch folgende zu erwähnen, die jedoch nicht im Gebrauche geblieben sind, und sich leicht aus dem Sinus und Cosinus ergeben:

1) die **Sekante** eines Winkels, d. i. der reciproke Werth des Cosinus, nämlich (Fig. 197.)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha};$$

2) die **Cosekante**, d. i. der reciproke Werth des Sinus, nämlich

$$\frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} = \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\sin \alpha};$$

3) Der **Sinusversus** (Quersinus); d. i. der Unterschied zwischen der Einheit und dem Cosinus, nämlich

$$\frac{c-b}{c} = 1 - \frac{b}{c} = 1 - \cos \alpha = \text{sinv. } \alpha;$$

4) der **Cosinusversus** (Quercosinus), d. i. der Unterschied zwischen der Einheit und dem Sinus, nämlich

$$\frac{c-a}{c} = 1 - \frac{a}{c} = 1 - \sin \alpha = \text{cosv. } \alpha.$$

§. 404.

Erkl. 1. Um obige (eigentlich nur für spitze Winkel geltende) Erklärungen auf alle Arten von Winkeln anwenden zu können, denke man sich (Fig. 198.) den Schenkel BC des Winkels ACB fest, dagegen AC um den Scheitel C beweglich; so ist klar, daß, wenn man AC eine ganze Umdrehung machen läßt, der von beiden Schenkeln gebildete Winkel alle möglichen Größen eines Winkels von 0^0 bis 360^0 durchläuft; ebenso, daß mit jeder Aenderung des Winkels auch die Größe der die goniometrischen Funktionen gebenden Linien AD und CD sich ändere. Ferner ist ersichtlich, daß zur Ermittlung der Funktionen verschiedener Winkel das Loth aus einem Punkte des beweglichen auf den unbeweglichen Schenkel bald auf die eine, bald auf die andere Seite des letztern fallen wird, z. B. bald von oben herab, bald von unten hinauf gezogen werden muß, daß es bald den unbeweglichen Schenkel selbst, bald dessen Verlängerung trifft.

Dieser Gegensatz in der Lage darf nicht unberücksichtigt bleiben. Man bezeichnet ihn durch die Benennungen positiv und negativ. Wird z. B. die Richtung der Senkrechten von oben herab als positiv angesehen, so wird die ihr entgegengesetzte von unten hinauf als negativ betrachtet; ebenso ist die Richtung CG negativ, wenn CB als positiv angesehen wird.

Man betrachtet die Lage der Linien, deren Quotienten die Winkelfunktionen bestimmen, wie sie sich beim spitzen Winkel ergibt, als positiv, und daher auch für alle übrigen Winkel, wenn ihre Lage mit der beim spitzen Winkel übereinstimmt, außerdem als negativ.

2. Ein Winkel, der in Bezug auf einen andern entweder entgegengesetzte Lage oder entgegengesetzte Entstehungsart hat, heißt ein negativer Winkel, z. B. ∡ BCN in Beziehung auf ∡ ACB und den gemeinsamen Schenkel BC.

Zus. 1. Nach obigen Erklärungen ergeben sich in Hinsicht auf das Wachsen und Abnehmen, den positiven und negativen Werth der Funktionen verschiedener Winkel (mit Rücksicht auf §. 403.) leicht folgende Relationen:

1) Liegt der bewegliche Schenkel AC auf BC, so ist ∡ ACB = 0, ebenso AD = 0 und CD = CA; daher hat man

$$\text{I.}\begin{cases}\sin 0^0 = 0, \\ \cos 0^0 = +1,\end{cases}\Bigg|\begin{matrix}\text{tang } 0^0 = 0 \text{ und} \\ \text{cotg } 0^0 = \infty.\end{matrix}$$

2) Läßt man den spitzen Winkel ACB von 0° bis 90° wachsen, so wird AD größer und CD kleiner (§. 93, II.); folglich nehmen auch der Sinus und die Tangente zu, dagegen Cosinus und Cotangente ab. Für ∡ BCE = 90° verschwindet CD, und AD fällt mit CE zusammen; daher wird

$$\text{II.}\begin{cases}\sin 90^0 = \sin R = +1, \\ \cos 90^0 = \cos R = 0,\end{cases}\Bigg|\begin{matrix}\text{tang } 90^0 = \text{tg } R = \infty, \\ \text{cotg } 90^0 = \text{cotg } R = 0.\end{matrix}$$

Der Sinus des rechten Winkels wird gewöhnlich Sinus totus genannt.

3) Bei einem stumpfen Winkel (BCF) trifft das Perpendikel (FH) aus einem Punkte des beweglichen Schenkels die Verlängerung (CG) des unbeweglichen (fällt auf die entgegengesetzte Seite vom Scheitel des Winkels), ferner wird FH desto kleiner und CH desto größer, je stumpfer der Winkel wird; also nehmen auch der Sinus und die Tangente ab, dagegen Cosinus und Cotangente zu, und weil CH negativ ist, so ist nur „der Sinus positiv, alle übrigen Funktionen sind negativ.“ Fällt CF auf CG, so wird FH = 0 und CH = CF; daher hat man

$$\text{III.}\begin{cases}\sin 180^0 = \sin 2R = 0, \\ \cos 180^0 = \cos 2R = -1,\end{cases}\Bigg|\begin{matrix}\text{tang } 180^0 = \text{tang } 2R = 0, \\ \text{cotg } 180^0 = \text{cotg } 2R = -\infty.\end{matrix}$$

4) Für erhabene Winkel zwischen 2R und 3R nimmt KL zu und CL ab und beide sind negativ; daher nehmen auch Sinus und Tangente zu, Cosinus und Cotangente ab, ferner sind „der Sinus und Cosinus negativ, Tangente und Cotangente positiv.“ Erreicht der Winkel 3R oder 270°, so hat man

$$\text{IV.}\begin{cases}\sin 270^0 = \sin 3R = -1, \\ \cos 270^0 = \cos 2R = 0,\end{cases}\Bigg|\begin{matrix}\text{tang } 270^0 = \text{tang } 3R = \infty, \\ \text{cotg } 270^0 = \text{cotg } 3R = 0.\end{matrix}$$

5) Für erhabene Winkel zwischen 3R und 4R ist NP ab= und CP zunehmend, dann NP negativ und CP positiv; folglich nehmen auch Sinus und Tangente ab, Cosinus und Cotangente zu; ferner ist nur der „Cosinus positiv, die übrigen Funktionen sind negativ.“ Kommt CN auf CB, wird also der Winkel = 4R = 360°, so hat man

$$\text{V.}\begin{cases}\sin 360^0 = \sin 4R = 0, \\ \cos 360^0 = \cos 4R = +1,\end{cases}\Bigg|\begin{matrix}\text{tang } 360^0 = \text{tang } 4R = 0, \\ \text{cotg } 360^0 = \text{cotg } 4R = \infty.\end{matrix}$$

6) Wird jetzt die Drehung des beweglichen Schenkels noch weiter (also über 360^0 hinaus) fortgesetzt, so kehren offenbar dieselben Gesetze wieder, so daß also, es mag α was immer für einen Winkel unter 360^0 und n eine beliebige ganze Zahl bezeichnen:

$$\text{VI.} \left\{ \begin{array}{l|l} \sin(n.4R+\alpha)=\sin\alpha, & \text{tang}(n.4R+\alpha)=\text{tg}\,\alpha, \text{ und} \\ \cos(n.4R+\alpha)=\cos\alpha, & \text{cotg}(n.4R+\alpha)=\text{cotg}\,\alpha \text{ ist.} \end{array} \right.$$

Zus. 2. Die absoluten Werthe der Tangenten und Cotangenten durchlaufen alle Zahlenwerthe von 0 bis ∞ (Zus. 1.).

§. 405.

Lehrs. Von zwei (spitzen) Complementswinkeln ist der Sinus und die Tangente des einen beziehungsweise dem Cosinus und der Cotangente des andern gleich, und umgekehrt.

Dat. $\measuredangle\, \alpha + \beta = 90^0$ (Fig. 197.).

$$\text{Thes.} \left\{ \begin{array}{l|l} \text{I. } \sin(R-\alpha)=\cos\alpha, & \text{tang}(R-\alpha)=\text{cotg}\,\alpha, \\ \text{II. } \cos(R-\alpha)=\sin\alpha, & \text{cotg}(R-\alpha)=\text{tg}\,\alpha. \end{array} \right.$$

Bew. Da $\measuredangle\, \alpha + \beta = R$, so ist auch $\measuredangle\, \gamma = R$, und daher $BC \perp AC$. Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich nunmehr unmittelbar aus dem Begriffe der Funktionen; denn es ist z. B. ebensowohl

$\frac{AC}{AB} = \cos\alpha$, als auch $\frac{AC}{AB} = \sin\beta = \sin(R-\alpha)$; daher

$$\sin(R-\alpha) = \cos\alpha \text{ ꝛc.}$$

Zus. Statt des Sinus oder der Tangente eines Winkels kann also jedesmal der Cosinus oder die Cotangente seines Complementes genommen werden, und umgekehrt.

Anm. Sinus und Tangente werden auch Hauptfunktionen, Cosinus und Cotangente, als Funktionen des Complementes, Neben- oder Cofunktionen genannt.

§. 406.

Aufg. Die Funktionen eines stumpfen Winkels auf die eines spitzen zurückzuführen.

Aufl. Je nachdem der Winkel die Form $2R-\alpha$ oder $R+\alpha$ hat, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

A. Ist der spitze Winkel α das Supplement eines gegebenen stumpfen Winkels $ABC = 2R - \alpha$ (Fig. 199.), so erhält man

$$\text{I.} \begin{cases} \sin(2R - \alpha) = \sin\alpha, \\ \cos(2R - \alpha) = -\cos\alpha, \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{tang}(2R - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha, \\ &\text{cotg}(2R-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha.\text{*)} \end{aligned}$$

Bew. Verlängert man AB und fällt CD ⊥ AD, so gehören die absoluten Werthe der Linien CD und BD offenbar sowohl dem Winkel ABC = 2R − α als auch seinem Supplemente CBD = α an; beide haben somit die gleichen Funktionen, und es ist nur zu berücksichtigen, daß BD negativ ist (§. 404, 1.).

B. Ist der ∡ ABC = R + α, bezeichnet also α den Ueberschuß des Winkels über 90°, so ergibt sich

$$\text{II.} \begin{cases} \sin(R + \alpha) = \cos\alpha, \\ \cos(R + \alpha) = -\sin\alpha, \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{tang}(R + \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha, \\ &\text{cotg}(R + \alpha) = -\text{tg}\,\alpha. \end{aligned}$$

Bew. Errichtet man im Scheitel B des Winkels ABC = R + α die Linie BE ⊥ AB, so ist ∡ CBE = α. Verlängert man noch den Schenkel AB, und zieht CD ⊥ AD und CF ⊥ BE, so ist BF = CD und CF = BD (§. 98.); ferner hat man

$$\sin(R + \alpha) = \frac{CD}{BC} = \frac{BF}{BC} = \cos CBE = \cos\alpha, \text{ ebenso}$$

$$\cos(R + \alpha) = \frac{-BD}{BC} = -\frac{CF}{BC} = -\sin\alpha, \text{ u. s. f.}$$

Zus. Die Sinus zweier Supplements- oder Nebenwinkel sind also einander vollkommen gleich, und umgekehrt gehören zu jedem (positiven) Sinus zwei Winkel, die sich zu 2R ergänzen.

§. 407.

Aufg. Die goniometrischen Funktionen erhabener Winkel auf die von spitzen Winkeln zurückzuführen.

Aufl. Die verschiedenen Formen, welche ein convexer Winkel haben kann, sind 2R + α; 3R − α; 4R − α und 3R + α.

A. Ist ∡ $\widehat{ABC}$ = 2R + α (Fig. 200.) **), so erhält man

$$\text{I.} \begin{cases} \sin(2R + \alpha) = -\sin\alpha, \\ \cos(2R + \alpha) = -\cos\alpha, \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{tang}(2R + \alpha) = \text{tg}\,\alpha, \\ &\text{cotg}(2R + \alpha) = \text{cotg}\,\alpha. \end{aligned}$$

---

*) Der Anfänger unterlasse nicht, diese, sowie alle in der Folge sich ergebenden Formeln in Worten wiederzugeben.

**) Wir bezeichnen den erhabenen Winkel ABC zum Unterschiede von dem spitzen ∡ ABC durch ∡ $\widehat{ABC}$.

Bew. Verlängert man AB, so ist offenbar $\measuredangle$ CBD $= \alpha$. Fällt man ferner CD $\perp$ AD, so bestimmen die Maße der Linien CD und BD sowohl die Funktionen des Winkels $\widehat{ABC} = 2R + \alpha$, als auch die des spitzen Winkels CBD $= \alpha$; daher ergibt sich leicht mit Rücksicht auf die Lage der Linien CD und BD die Richtigkeit der Behauptung.

B. Wenn $\measuredangle \widehat{ABC} = 3R - \alpha$ ist, so ergibt sich

$$\text{II.} \begin{cases} \sin(3R - \alpha) = -\cos\alpha, & \text{tang}(3R - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha, \\ \cos(3R - \alpha) = -\sin\alpha, & \text{cotg}(3R - \alpha) = \text{tg}\,\alpha. \end{cases}$$

Bew. Errichtet man in B die Linie BE $\perp$ AB, so ist $\measuredangle$ CBE $= \alpha$. Fällt man noch CD $\perp$ AD und CF $\perp$ BE, so entsteht das Rechteck DF, und es ist CD $=$ BF und CF $=$ BD. Ferner hat man

$$\sin(3R - \alpha) = \frac{-CD}{BC} = -\frac{CD}{BC} = -\frac{BF}{BC} = -\cos\alpha,$$

da die Maßzahlen der Linien BF und BC dem $\measuredangle$ CBE $= \alpha$ angehören. — Auf dieselbe Art ergibt sich der Beweis für den übrigen Theil der Behauptung.

C. Ist $\measuredangle \widehat{ABC} = 4R - \alpha$ (Fig. 201.), so hat man

$$\text{III.} \begin{cases} \sin(4R - \alpha) = -\sin\alpha, & \text{tang}(4R - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha, \\ \cos(4R - \alpha) = +\cos\alpha, & \text{cotg}(4R - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha. \end{cases}$$

Bew. Da $\measuredangle \widehat{ABC} = 4R - \alpha$, so ist der spitze Winkel ABC $= \alpha$. Fällt man CD $\perp$ AB, so gehören die absoluten Werthe der Linien BC, CD und BD sowohl dem erhabenen als spitzen Winkel ABC an; beide erhalten also die gleichen Funktionen, wobei nur die negative Lage von CD zu berücksichtigen ist.

D. Ist $\measuredangle \widehat{ABC} = 3R + \alpha$ (Fig. 201.), so erhält man

$$\text{IV.} \begin{cases} \sin(3R + \alpha) = -\cos\alpha, & \text{tang}(3R + \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha, \\ \cos(3R + \alpha) = +\sin\alpha, & \text{cotg}(3R + \alpha) = -\text{tg}\,\alpha. \end{cases}$$

Bew. Errichtet man in B die Linie BE $\perp$ AB, so ist $\measuredangle$ CBE $= \alpha$. Wird noch CD $\perp$ AB und CF $\perp$ BE gezogen, so hat man BF $=$ CD und CF $=$ BD; ferner ist

$$\sin(3R + \alpha) = \frac{-CD}{BC} = -\frac{CD}{BC} = -\frac{BF}{BC} = -\cos\alpha;$$

$$\cos(3R + \alpha) = \frac{BD}{BC} = \frac{CF}{BC} = \sin\alpha, \text{ u. s. w.,}$$

da die absoluten Werthe der Linien BC, BF und CF dem $\sphericalangle$ CBE $= \alpha$ angehören.

§. 408.

Aufg. Die Funktionen eines negativen Winkels auf die des gleichen positiven Winkels zurückzuführen.

Aufl. Ist $-\alpha$ der gegebene, also α ein ihm gleicher positiver Winkel, so erhält man

I. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$,	III. $\tang(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$,
II. $\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$,	IV. $\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$.

Bew. Da sich ein negativer Winkel von dem gleichen positiven nur durch die entgegengesetzte Lage oder Entstehungsart unterscheidet, (§. 404, 2.), so sind seine Funktionen mit denen eines positiven Winkels von der Form $4R - \alpha$ einerlei; also folgt die Richtigkeit obiger Gleichungen aus §. 407, III.

§. 409.

Lehrs. Der Sinus eines Winkels (α) ist gleich der Sehne des doppelten Bogens getheilt durch den Diameter eines Kreises, welcher aus dem Scheitel des Winkels mit beliebigem Radius (r) beschrieben wird.

Thes. $\sin\alpha = \frac{\text{chorda } 2\alpha}{2r}$ (Fig. 202.).

Bew. Ist der gegebene Winkel ACB $= \alpha$, und man verlängert das Loth AD, bis es die Peripherie in E trifft, und zieht CE, so ist $\triangle$ ACD $\cong$ DCE (IV.); also auch AD $=$ DE $= \frac{1}{2}$AE, und $\sphericalangle \alpha =$ BCE, folglich $\sphericalangle$ ACE $= 2\alpha$. Ferner hat man

$$\sin\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}AE}{r} = \frac{\frac{1}{2}\text{chorda } 2\alpha}{r} = \frac{\text{ch.}2\alpha}{2r}.$$

Z. B. $\sin 30^0 = \frac{\text{ch.}60^0}{2r} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} = \cos 60^0$ (§. 241 u. §. 405.);

$$\sin 45^0 = \frac{\text{ch.}90^0}{2r} = \frac{r\sqrt{2}}{2r} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos 45^0 \text{ (§. 240, Zus.)};$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 60^0 &= \frac{\text{ch.}120^0}{2r} = \frac{r\sqrt{3}}{2r} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \cos 30^0 \\ \sin 15^0 &= \frac{\text{ch.}30^0}{2r} = \frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2r} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \cos 75^0\end{aligned}\right\}(\text{§. 249, Zus.});$$

$$\sin 18^0 = \frac{\text{ch.}36^0}{2r} = \frac{\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)}{2r} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \cos 72^0\ (\text{§. 251.})\ \text{rc.}$$

§. 410.

Lehrs. Die Summe der Quadrate des Sinus und Cosinus eines Winkels ist stets der Einheit gleich.

Thes. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$ *)

Bew. Es ist im rechtwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 197.) nach dem pythagoräischen Lehrsatze $a^2 + b^2 = c^2$, also auch

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \text{ oder } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \text{ d. i.}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Daß der Satz auch für stumpfe und erhabene Winkel gilt, folgt aus §. 406. und §. 407.

Zus. Aus der Gleichung des Lehrsatzes ergeben sich unmittelbar folgende:

I. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$	III. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha,$
II. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha},$	IV. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$

Kennt man also den Sinus eines Winkels, so läßt sich leicht dessen Cosinus bestimmen und umgekehrt. So wird z. B.

$$\cos 15^0 = \sqrt{1-\sin^2 15^0} = \sqrt{1-\tfrac{1}{4}(2-\sqrt{3})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sin 75^0.$$

§. 411.

Lehrs. Für jeden Winkel (α) ist I. die **Tangente** gleich dem Sinus getheilt durch den Cosinus; II. die **Cotangente** gleich dem Cosinus getheilt durch den Sinus dieses Winkels.

Thes. I. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; II. $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

*) Man bezeichnet das Quadrat einer Winkelfunktion, z. B. des Sinus gewöhnlich durch $\sin^2\alpha$, auch durch $\sin\alpha^2$ oder $(\sin\alpha)^2$, während dagegen der Sinus des quadrirten Winkels durch $\sin(\alpha)^2$ angedeutet wird.

Bew. Nach §. 403. hat man (Fig. 197.): $\operatorname{tg}\alpha = a:b$, und $\operatorname{cotg}\alpha = b:a$; daher ist auch

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a:c}{b:c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \text{ dann } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b:c}{a:c} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Zus. 1. Aus den Gleichungen des Lehrsatzes folgt

$$\text{III. } \sin\alpha = \cos\alpha \,.\, \operatorname{tg}\alpha; \quad \text{IV. } \cos\alpha = \sin\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\alpha.$$

Zus. 2. Setzt man in den Gleichungen des Lehrsatzes statt $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ ihre Werthe aus §. 410, Zus., so erhält man

$$\text{V. } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, \text{ und}$$

$$\text{VI. } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

Zus. 3. Werden die Gleichungen des Zus. 2. umgekehrt für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ aufgelöst, so findet man

$$\text{VII. } \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}, \text{ und}$$

$$\text{VIII. } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}.$$

Aus dieser letztern Gleichung (VIII.) folgt die öfter vorkommende Formel:

$$\text{IX. } \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \ (= \sec\alpha).$$

§. 412.

Aufg. Die goniometrischen Funktionen eines Winkels auf gleiche Benennung zu bringen (gleichnamig zu machen).

Aufl. u. Bew. Man beschreibe aus dem Scheitel des gegebenen Winkels $ACB = \alpha$ (Fig. 203.) mit beliebigem Radius $CA = r$ einen Kreis, der den andern Schenkel in B schneidet, und fälle $BD \perp AC$, so hat man

$$\sin\alpha = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{r}, \text{ und } \cos\alpha = \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{r}.$$

Errichtet man ferner in A ein Loth auf AC, das den (verlängerten) Schenkel CB in E trifft, so ist

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AE}{AC} = \frac{AE}{r}.$$

Wird endlich noch CF $\perp$ AC, dann in F eine Senkrechte auf CF errichtet, welche die Verlängerung von CB in G schneidet, so ist FG $\#$ AC (§. 43, Zus. 2.), und daher als Wechselwinkel CGF $= \alpha$; ferner

$$\text{cotg}\, CGF = \frac{FG}{CF},\ \text{d. i. } \text{cotg}\,\alpha = \frac{FG}{r}.$$

Man nennt die Linien, welche durch den Radius eines Kreises dividirt die goniometrischen Funktionen eines Winkels geben, goniometrische (auch trigonometrische) Linien, und zwar BD die Sinus-, CD die Cosinus-, AE die Tangenten-, und FG die Cotangenten-Linie.

Zus. Setzt man $r = 1$, so wird $\sin\alpha = BD$ u. s. w., d. h. für den Radius 1 sind die Winkelfunktionen gleich den Maßzahlen der goniometrischen Linien, und diese können deßhalb für jene gesetzt werden.

Anm. Zieht man in einem Kreise (Fig. 204.), dessen Radius AC $= 1$ ist, zwei sich senkrecht schneidende Diameter AB und DE, wodurch der Kreis in die vier durch I. — IV. bezeichneten Quadranten getheilt wird, betrachtet den Schenkel CF des Winkels ACF als beweglich, dann A als Anfangspunkt für die Tangenten-, und D als solchen für die Cotangenten-Linien; so lassen sich alle bisher erörterten Gesetze anschaulich in Linien darstellen. — Das Weitere hierüber mündlich!

II. Kap. Von den goniometrischen Funktionen zusammengesetzter Winkel.

§. 413.

Lehrs. Für die Summe zweier Winkel (α und β) ist I. der Sinus gleich der Summe der Produkte aus dem Sinus eines jeden in den Cosinus des andern; II. der Cosinus gleich der Differenz zwischen dem Produkte der Cosinus und dem der Sinus beider Winkel.

Thes. $\begin{cases} \text{I. } \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta; \\ \text{II. } \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta. \end{cases}$

Bew. Zieht man (Fig. 205.) aus einem beliebigen Punkte A des Schenkels AB die Linien AE $\perp$ BD, dann AF $\perp$ BC und

$FG \perp BD$, endlich noch $FH \# BD$, so ist $EH = FG$, $FH = EG$ und $\sphericalangle AFH = R - HFB = BFG$, also auch $\sphericalangle FAH = \alpha$ (§. 77. Zus. 5.). — Nun hat man

1) hinsichtlich der Bestimmung des Sinus der Summe:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AE}{AB} = \frac{EH + AH}{AB} = \frac{FG}{AB} + \frac{AH}{AB}$$

$$= \frac{FG}{BF} \cdot \frac{BF}{AB} + \frac{AH}{AF} \cdot \frac{AF}{AB}, \text{ d. i.}$$

$$= \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta.$$

2) Zur Bestimmung des Cosinus der Summe hat man

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{BE}{AB} = \frac{BG - EG}{AB} = \frac{BG}{AB} - \frac{FH}{AB}$$

$$= \frac{BG}{BF} \cdot \frac{BF}{AB} - \frac{FH}{AF} \cdot \frac{AF}{AB}, \text{ d. i.}$$

$$= \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta.$$

Zus. 1. Setzt man in den Formeln des Lehrsatzes $\beta = \alpha$, so erhält man Sinus und Cosinus des doppelten aus denen des einfachen Winkels, nämlich

III. $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha . \cos\alpha$, und

IV. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Zus. 2. Aus der Formel IV. ergeben sich, wenn man zuerst statt $\cos^2\alpha$, dann statt $\sin^2\alpha$ seinen Werth aus §. 410, III. und I. substituirt, folgende:

V. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$,	VII. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$,
VI. $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$,	VIII. $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$.

Zus. 3. Wird in den Formeln des Zus. 1. überall α statt 2α, also $\frac{1}{2}\alpha$ statt α gesetzt, so verwandeln sie sich in folgende:

IX. $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha . \cos\frac{1}{2}\alpha$,	XII. $\cos\alpha = \cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha$,
X. $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$,	XIII. $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1$,
XI. $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha$,	XIV. $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 1 + \cos\alpha$,

aus denen sich Sinus und Cosinus eines Winkels aus Sin. und Cos. des halben Winkels, und umgekehrt, finden lassen.

Zus. 4. Dividirt man die Gleichungen XI. und XIV. durch IX., so erhält man:

XV. $\dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$,	XVI. $\dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$.

Die Gleichung XV. durch XVI. getheilt gibt

$$\text{XVII.}\quad \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{1}{\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

§. 414.

Lehrs. Für die Differenz zweier Winkel (α und β) ist I. der **Sinus** gleich dem Unterschiede der Produkte aus dem Sinus des ersten in den Cosinus des zweiten und dem Cosinus des ersten in den Sinus des zweiten; II. der **Cosinus** gleich der Summe der gleichnamigen Produkte aus Cosinus und Sinus beider Winkel.

Thes. $\begin{cases}\text{I. } \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\,.\cos\beta-\cos\alpha\,.\sin\beta\,;\\ \text{II. } \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\,.\cos\beta+\sin\alpha\,.\sin\beta.\end{cases}$

Bew. Es sei $\measuredangle$ ABC $=\alpha$, (Fig. 206.), ABD $=\beta$, folglich DBC $=\alpha-\beta$. Fällt man aus einem beliebigen Punkte E des Schenkels BD die Linie EA $\perp$ AB, dann EF $\perp$ BC und AG $\perp$ BC, zieht dann noch EH $\#$ BC, so ist HG $=$ EF, EH $=$ FG und $\measuredangle$ EAH $=$ R $-$ BAG $=$ ABG $=\alpha$. — Ferner hat man

1) in Bezug auf den **Sinus** der Differenz:

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{EF}{BE}=\frac{GH}{BE}=\frac{AG}{BE}-\frac{AH}{BE}$$
$$=\frac{AG}{AB}\cdot\frac{AB}{BE}-\frac{AH}{AE}\cdot\frac{AE}{BE},\text{ d. i.}$$
$$=\sin\alpha\,.\cos\beta-\cos\alpha\,.\sin\beta.$$

2) In Hinsicht auf den **Cosinus** der Differenz ist:

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{BF}{BE}=\frac{BG+GF}{BE}=\frac{BG}{BE}+\frac{EH}{BE}$$
$$=\frac{BG}{AB}\cdot\frac{AB}{BE}+\frac{EH}{AE}\cdot\frac{AE}{BE},\text{ d. i.}$$
$$=\cos\alpha\,.\cos\beta+\sin\alpha\,.\sin\beta.$$

Zus. Nach diesem und dem vorigen Lehrsatze hat man allgemein folgende zwei wichtigen Formeln:

$$\text{III.}\begin{cases}\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\,.\cos\beta\pm\cos\alpha\,.\sin\beta,\text{ und}\\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\,.\cos\beta\mp\sin\alpha\,.\sin\beta.\end{cases}$$

§. 415.

Aufg. Die Tangente der Summe oder Differenz zweier Winkel (α und β) durch die Tangenten und Cotangenten dieser Winkel auszudrücken.

Aufl. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta \mp 1}$.

Bew. Es ist $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$ (§. 411, I.)

$$= \frac{\sin\alpha \,.\, \cos\beta \pm \cos\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta \mp \sin\alpha \,.\, \sin\beta}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner dieses Bruches zuerst durch $\cos\alpha \,.\, \cos\beta$, dann durch $\sin\alpha \,.\, \sin\beta$, so ergeben sich (mit Rücksicht auf §. 411, I. und II.) obige Formeln.

Zus. Setzt man in der Formel für $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ den Winkel $\beta = \alpha$, so ergibt sich für die Tangente des doppelten Winkels

$$\text{I. } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1},$$ und hieraus,

wenn man α statt 2α, folglich $\frac{1}{2}\alpha$ statt α setzt:

$$\text{II. } \operatorname{tg}\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha} = \frac{2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\alpha - 1}.$$

§. 416.

Aufg. Die Cotangente der Summe oder Differenz zweier Winkel (α und β) durch die Cotangenten und Tangenten beider Winkel zu bestimmen.

Aufl. $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \;\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}$.

Bew. Es ist $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)}$

$$= \frac{\cos\alpha \,.\, \cos\beta \mp \sin\alpha \,.\, \sin\beta}{\sin\alpha \,.\, \cos\beta \pm \cos\alpha \,.\, \sin\beta}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner dieses Bruches einmal durch $\sin\alpha \,.\, \sin\beta$, dann durch $\cos\alpha \,.\, \cos\beta$, so ergeben sich (mit Rücksicht auf §. 411, II. und I.) obige Werthe für $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta)$.

Zus. Wird in der Formel für $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta)$ der Winkel $\beta = \alpha$ gesetzt, so ergibt sich

$$\text{I. } \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2 \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2 \operatorname{tg}\alpha},$$ und hieraus

$$\text{II. } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\alpha - 1}{2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}{2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}.$$

§. 417.

Aufg. Die Summe und Differenz der Sinus zweier Winkel (α und β) in ein Produkt zu verwandeln.

Aufl. $\begin{cases} \text{I. } \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta); \\ \text{II. } \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta). \end{cases}$

Bew. Für jede zwei Winkel x und y ist (§. 414, III.)

$\sin(x+y) = \sin x\,.\,\cos y + \cos x\,.\,\sin y$, und

$\sin(x-y) = \sin x\,.\,\cos y - \cos x\,.\,\sin y$.

Werden diese Gleichungen zuerst addirt, dann die zweite von der ersten subtrahirt, so erhält man

a) $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\,.\,\cos y$, und

b) $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\,.\,\sin y$.

Setzt man nun $x+y=\alpha$ und $x-y=\beta$, also $x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $y=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, so verwandeln sich die Gleichungen a) und b) in die in der Aufl. angegebenen.

Zus. 1. Dividirt man die Gleichung I. durch II., und umgekehrt, so erhält man (mittelst §. 411.):

$$\text{III. } \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}, \text{ und}$$

$$\text{IV. } \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

Zus. 2. Werden die Gleichungen I. und II. durch $\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ getheilt, so wird

$$\text{V. } \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}, \text{ und}$$

$$\text{VI. } \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

Zus. 3. Vermöge der Gleichung I. hat man

$\sin 90^0 + \sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}(90^0+\alpha)\,.\,\cos\frac{1}{2}(90^0-\alpha)$, d. i.

$1+\sin\alpha = 2\sin(45^0+\frac{1}{2}\alpha)\,.\,\cos(45^0-\frac{1}{2}\alpha)$; ebenso wird

$1-\sin\alpha = 2\cos(45^0+\frac{1}{2}\alpha)\,.\,\sin(45^0-\frac{1}{2}\alpha)$.

Nun ist aber $\cos(45^0-\frac{1}{2}\alpha) = \sin(45^0+\frac{1}{2}\alpha)$, indem beide Winkel sich zu 90^0 ergänzen; ebenso $\sin(45^0-\frac{1}{2}\alpha) = \cos(45^0+\frac{1}{2}\alpha)$; daher wird durch Substitution:

VII. $1+\sin\alpha = 2\sin^2(45^0+\frac{1}{2}\alpha) = 2\cos^2(45^0-\frac{1}{2}\alpha)$, und

VIII. $1-\sin\alpha = 2\cos^2(45^0+\frac{1}{2}\alpha) = 2\sin^2(45^0-\frac{1}{2}\alpha)$.

Durch Division dieser Gleichungen folgt

$$\text{IX.}\quad \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \operatorname{tg}^2(45^0+\tfrac{1}{2}\alpha) = \operatorname{cotg}^2(45^0-\tfrac{1}{2}\alpha), \text{ und}$$

$$\text{X.}\quad \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \operatorname{tg}^2(45^0-\tfrac{1}{2}\alpha) = \operatorname{cotg}^2(45^0+\tfrac{1}{2}\alpha).$$

§. 418.

Aufg. Die Summe und Differenz der Cosinus zweier Winkel (α und β) in ein Produkt zu verwandeln.

Aufl.
$$\begin{cases} \text{I.} & \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta); \\ \text{II.} & \cos\beta-\cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta). \end{cases}$$

Bew. Für jede zwei Winkel x und y ist (§. 414, III.):

a) $\cos(x+y) = \cos x\,.\cos y - \sin x\,.\sin y$, und

b) $\cos(x-y) = \cos x\,.\cos y + \sin x\,.\sin y$.

Werden diese Gleichungen zuerst addirt, dann a) von b) subtrahirt, so erhält man

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\,.\cos y, \text{ und}$$
$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x\,.\sin y.$$

Aus diesen folgt das zu Beweisende, wenn man wieder $x+y=\alpha$ und $x-y=\beta$, also $x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $y=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ setzt.

Zus. 1. Durch Division der Gleichung II. durch I. folgt

$$\text{III.}\quad \frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Zus. 2. Dividirt man die Gleichungen I. und II. des §. 417. durch I. der Aufg., und umgekehrt die Formel II. der Aufg. durch II. und I. des §. 417., so erhält man:

$$\text{IV.}\quad \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin\beta} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

$$\text{V.}\quad \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

§. 419.

Aufg. Die Summe und Differenz I. der Tangenten; II. der Cotangenten, und III. der Cotangente und Tangente zweier Winkel in einen einfachen Ausdruck zu verwandeln.

Aufl. Sind α und β die gegebenen Winkel, so ist

$$\text{I. } \operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta};$$

$$\text{II. } \operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}, \text{ und}$$

$$\text{III. } \operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}.$$

Bew. Die beiden ersten Gleichungen ergeben sich, wenn man die Formel $\sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha \pm \beta)$ zuerst durch $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, dann durch $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ dividirt. Die dritte folgt aus der Division der Gleichung $\cos\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha \mp \beta)$ durch $\sin\alpha \cdot \cos\beta$.

Zus. Dividirt man die Werthe von $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ und $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$ durcheinander, so folgt

$$\text{IV. } \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Verwechselt man in vorstehender Gleichung α und β, und setzt $\beta = 45^0$, so ergibt sich, da $\operatorname{tg} 45^0 = 1$ ist (§. 403, Zus. 3.):

$$\text{V. } \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin(45^0 + \alpha)}{\sin(45^0 - \alpha)} = \operatorname{tg}(45^0 + \alpha) = \operatorname{cotg}(45^0 - \alpha), \text{ und}$$

$$\text{VI. } \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45^0 - \alpha) = \operatorname{cotg}(45^0 + \alpha),$$

weil $\sin(45^0 - \alpha) = \cos(45^0 + \alpha)$ ist, indem beide Winkel sich zu 90^0 ergänzen.

II. Abschnitt. Trigonometrie.

§. 420.

Erkl. 1. Die **Trigonometrie** (Dreiecksmessung) ist die Wissenschaft, aus je drei bestimmenden Stücken (**Elementen**) eines Dreieckes, welche in Zahlen gegeben sind, die übrigen durch Rechnung zu finden.

2. Die Berechnung der Seiten, Winkel und des Flächeninhaltes eines Dreieckes aus irgendwelchen bestimmenden Elementen desselben nennt man dessen **Auflösung**.

3. Die Trigonometrie zerfällt ihrem Gegenstande nach

I. in die ebene (Plantrigonometrie), welche sich mit der Auflösung ebener, geradliniger Dreiecke,

II. in die sphärische, die sich mit der Auflösung von sphärischen oder Kugeldreiecken beschäftigt.

Anm. 1. Bei ebenen Dreiecken muß unter den gegebenen Elementen wenigstens eine Seite sein, da die Winkel nicht die Größe, sondern nur die Form desselben bestimmen. Bei sphärischen Dreiecken genügen was immer für drei Stücke, da man es hier eigentlich nur mit Winkelgrößen zu thun hat, indem die Seiten als Bogen größter Kreise im Gradmaße gegeben sind. (Vgl. §. 314, Lehrs. und Anm. mit Rücksicht auf §. 350, Zus.).

Anm. 2. Trigonometrische Berechnungen werden stets logarithmisch geführt; daher ist es zweckmäßig in den allgemeinen Gleichungen Summen und Differenzen zu vermeiden. — Trigonometrische Tafeln!

I. Kap. Ebene Trigonometrie.

a) Grundgleichungen zur Auflösung ebener Dreiecke.

§. 421.

Lehrs. In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Thes. $a \div b \div c = \sin\alpha \div \sin\beta \div \sin\gamma$. *)

Bew. Zieht man in dem $\triangle ABC$ (Fig. 207.) die Höhe $BD = h$, so erhält man (nach §. 403, 1):

$h = c . \sin\alpha$, ebenso $h = a . \sin\gamma$; daher ist auch

$a . \sin\gamma = c . \sin\alpha$, woraus

$a \div c = \sin\alpha \div \sin\gamma$ folgt.

Auf dieselbe Weise ergibt sich $a \div b = \sin\alpha \div \sin\beta$ und $b \div c = \sin\beta \div \sin\gamma$.

§. 422.

Lehrs. In jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier (beliebiger) Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe zur Tangente der halben Differenz der jenen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

*) In allen folgenden Berechnungen bezeichnen a, b, c die (Maßzahlen der) Seiten, dann α, β, γ beziehungsweise die ihnen gegenüberliegenden Winkel und f den Flächeninhalt des Dreieckes.

Thes. $(a + b) \div (a \sim b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \div \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha \sim \beta)$. *)

Bew. Es ist $a \div b = \sin\alpha \div \sin\beta$ (§. 421.); folglich auch

$$(a + b) \div (a \sim b) = (\sin\alpha + \sin\beta) \div (\sin\alpha \sim \sin\beta)$$
$$= \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \sim \sin\beta} \div 1$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha \sim \beta)} \div 1 \text{ (§. 417, III.), d. i.}$$
$$= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \div \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha \sim \beta).$$

Zus. Da $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ (§. 77, Zus. 4.), also $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$, und daher $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(90^0 - \frac{1}{2}\gamma) = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$ ist, so hat man auch

$$(a + b) \div (a \sim b) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma \div \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha \sim \beta), \text{ d. h. } -?$$

§. 423.

Lehrs. In jedem Dreiecke ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern, weniger dem doppelten Produkte dieser letztern in den Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. **)

Thes. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$.

Bew. Zieht man (Fig. 207.) die Höhe $BD = h$, so hat man (nach §. 123.):

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AC.AD, \text{ d. i.}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.AD$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha,$$

da $AD : c = \cos\alpha$, also $AD = c.\cos\alpha$ ist.

Man beweise die Richtigkeit des Satzes für ein stumpfwinkliges Dreieck!

b) Auflösung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke, dann regulärer Figuren.

§. 424.

Erkl. 1. Da im rechtwinkligen Dreiecke der rechte Winkel bekannt ist, so brauchen zur Auflösung nur zwei Stücke gegeben zu

---

*) Das Zeichen „$\sim$" bedeutet hier und für die Folge, daß die kleinere Größe von der größern abzuziehen ist, daß z. B. statt $a - b$ auch $b - a$, und entsprechend $\beta - \alpha$ statt $\alpha - \beta$ gesetzt werden kann.

**) Dieser Satz wird auch der Carnot'sche Lehrsatz genannt.

sein, nämlich a) zwei Seiten, oder b) eine Seite und ein spitzer Winkel. Weil überdieß die beiden spitzen Winkel complementär sind (§. 77, Zus. 3.), so ist durch jeden von ihnen auch der andere gegeben, und man kann stets statt der Funktionen des einen die Cofunktionen des andern setzen, und umgekehrt (§. 405.).

2. Zur Auflösung eines gleichschenkligen Dreieckes genügen gleichfalls zwei Stücke als gegeben, weil durch einen Winkel auch die beiden andern bestimmt sind (§. 92, Zus. 2.), ferner durch die Höhe der Winkel an der Spitze und die Basis halbirt wird (§. 97, III.), wodurch die Auflösung sich auf das rechtwinklige Dreieck zurückführt.

§. 425.

Aufg. Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn zwei Seiten desselben gegeben sind.

Aufl. u. Bew. Ist $\measuredangle ACB = \gamma = 90^0$ (Fig. 197.), also $\sin\gamma = 1$ und $\cos\gamma = 0$ (§. 404, II.), dann

A.) die beiden Katheten a und b gegeben; so erhält man

I. $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta = a:b$ (§. 421. oder §. 403.);

II. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythag. Lehrs. oder §. 423.);

III. $f = \frac{1}{2}ab$ (§. 172, Zus. 1.).

Anm. Um die Formel II. für logarithmische Berechnung einzurichten, hat man

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+2ab+b^2-2ab} = \sqrt{(a+b)^2-2ab}.$$

Setzt man nun $2ab = m^2$, so wird

$$c = \sqrt{(a+b+m)(a+b-m)}, \text{ wobei } m = \sqrt{2ab} \text{ ist.}$$

B.) Ist die Hypotenuse c und eine Kathete b gegeben, so ergibt sich

I. $\cos\alpha = \sin\beta = b:c$ (§. 421. oder §. 403.);

II. $a = \sqrt{(c+b)(c-b)}$ (Pythag. Lehrs.);

III. $f = \frac{1}{2}b\sqrt{(c+b)(c-b)}$ (§. 185, I.).

§. 426.

Aufg. Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn eine Seite und ein spitzer Winkel gegeben ist.

Aufl. u. Bew. Nebst dem Winkel $\gamma = 90^0$ sei gegeben

A.) die Hypotenuse c und der spitze Winkel α; so wird

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. } a = c \,.\, \sin\alpha \\ \text{II. } b = c \,.\, \cos\alpha\end{array}\right\} \text{ (§. 421. oder §. 403.);}$$

$$\text{III. } f = \tfrac{1}{4} c^2 \,.\, \sin 2\alpha,$$

da $f = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} c \,.\, \sin\alpha \,.\, c \,.\, \cos\alpha = \frac{1}{4} c^2 \,.\, 2 \sin\alpha \,.\, \cos\alpha$
$= \frac{1}{4} c^2 \,.\, \sin 2\alpha$ ist (§. 413, III.).

B.) Ist die Kathete b und der Winkel α bekannt; so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. } a = b \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha \\ \text{II. } c = b : \cos\alpha\end{array}\right\} \text{ (§. 421. oder §. 403.);}$$

$$\text{III. } f = \tfrac{1}{2} b^2 \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha,$$

welche Formel durch Substitution des Werthes von a aus I. in die Gleichung $f = \frac{1}{2} ab$ folgt.

§. 427.

Aufg. Ein gleichschenkliges Dreieck aufzulösen.

Aufl. u. Bew. Die Fälle, welche hier vorkommen können, wenn a den Schenkel und b die Basis bezeichnet (Fig. 208.), sind folgende drei:

A.) Sind die Seiten a und b gegeben; so folgt

$$\text{I. } \cos\alpha = \sin\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\frac{1}{2}b}{a} = \frac{b}{2a} \text{ (§. 425, B.);}$$

$$\text{II. } f = \tfrac{1}{4} b \sqrt{(2a+b)(2a-b)} \text{ (§. 181, II.).}$$

B.) Ist die Basis b und ein Winkel α oder β bekannt; so ergibt sich (nach §. 92, Zus. 2, dann §. 426, B.):

$$\text{I. } \beta = 2(90-\alpha), \text{ oder } \alpha = 90 - \tfrac{1}{2}\beta;$$

$$\text{II. } a = \tfrac{1}{2} b : \cos\alpha = \tfrac{1}{2} b : \sin\tfrac{1}{2}\beta;$$

$$\text{III. } f = \tfrac{1}{4} b^2 \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha = \tfrac{1}{4} b^2 \,.\, \mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\beta,$$

da $f = \frac{1}{2} b \,.\, BD$, und $BD = \frac{1}{2} b \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2} b \,.\, \mathrm{cotg}\,\beta$ ist.

C.) Ist der Schenkel a und ein Winkel gegeben; so findet sich der andere Winkel wie B, I., dann (nach §. 426, A.):

$$\text{I. } b = 2a \,.\, \cos\alpha = 2a \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\beta;$$

$$\text{II. } f = \tfrac{1}{2} a^2 \,.\, \sin 2\alpha = \tfrac{1}{2} a^2 \,.\, \sin\beta.$$

§. 428.

Aufg. Ein reguläres Vieleck von gegebener Seitenzahl aufzulösen.

Aufl. u. Bew. Die Auflösung wird (nach §. 239, Zus. 2.) auf die des gleichschenkligen Dreieckes zurückgeführt. Setzt man daher (Fig. 137.) die Seite des Polygons $FG = s$, den Radius des umschriebenen Kreises $CG = r$, den des eingeschriebenen $CP = \varrho$, und den Centriwinkel $GCF = C$; so ist, wenn n die Seitenzahl bezeichnet, $C = 360^0 : n$, also $\frac{1}{2}C = 180^0 : n$, und man hat folgende drei Fälle, in welchen allen C durch die Seitenzahl des Polygons gegeben ist:

A.) Ist die Seite s bekannt, so wird

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I. } \varrho = \frac{1}{2}s \,.\, \text{cotg}\, \frac{1}{2}C \\ \text{II. } r = \frac{1}{2}s : \sin \frac{1}{2}C \end{array}\right\} (\text{§. } 426, \text{ B.});$$

$$\text{III. } f = \tfrac{1}{4}ns^2 \,.\, \text{cotg}\, \tfrac{1}{2}C. \quad (\text{Vgl. §. } 260, \text{ Zus. } 1.)$$

B.) Ist der Radius r des umschriebenen Kreises bekannt, so ergibt sich (nach §. 426, A.):

$$\text{I. } s = 2r \,.\, \sin \tfrac{1}{2}C;$$

$$\text{II. } \varrho = r \,.\, \cos \tfrac{1}{2}C;$$

$$\text{III. } f = \tfrac{1}{2}nr^2 \,.\, \sin C.$$

Ist $^1/_2 C$ sehr klein, so findet man ϱ genauer aus folgender Gleichung: $r - \varrho = 2r \,.\, \sin^2 {}^1/_4 C$.

C.) Wenn der Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises gegeben ist, so folgt (nach §. 426, B.):

$$\text{I. } s = 2\varrho \,.\, \text{tg}\, \tfrac{1}{2}C;$$

$$\text{II. } r = \varrho : \cos \tfrac{1}{2}C, \text{ oder, wenn } \tfrac{1}{2}C \text{ sehr klein ist:}$$

$$r - \varrho = \varrho\, \text{tg}\, \tfrac{1}{2}C \,.\, \text{tg}\, \tfrac{1}{4}C.$$

$$\text{III. } f = n\varrho^2 \,.\, \text{tg}\, \tfrac{1}{2}C.$$

Die bei II. angegebene zweite Formel läßt sich aus der ersten auf folgende Art ableiten: Subtrahirt man beiderseits ϱ, so wird

$$r - \varrho = \frac{\varrho(1 - \cos {}^1/_2 C)}{\cos {}^1/_2 C} = \frac{2\varrho \sin^2 {}^1/_4 C}{\sin {}^1/_2 C \,.\, \text{cotg}\, {}^1/_2 C} \; (\text{§. } 411, \text{ IV.})$$

$$= \frac{2\varrho \sin^2 {}^1/_4 C}{2 \sin {}^1/_4 C \,.\, \cos {}^1/_4 C} \,.\, \text{tg}\, {}^1/_2 C = \varrho\, \text{tg}\, {}^1/_4 C \,.\, \text{tg}\, {}^1/_2 C.$$

Zus. Bezeichnet r den Radius eines Kreises, $BD = s$ (Fig. 136.) die Seite des ihm eingeschriebenen, $LM = S$ die des gleichnamigen umschriebenen regulären Polygons, so ergibt sich

$$\text{I. } s = 2r \,.\, \sin \tfrac{1}{2}C \; (\text{§. } 426, \text{ A.});$$

$$\text{II. } S = 2r \,.\, \text{tg}\, \tfrac{1}{2}C \; (\text{§. } 426, \text{ B.}).$$

c) Auflösung schiefwinkliger Dreiecke.

§. 429.

Aufg. Ein Dreieck aufzulösen, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Aufl. u. Bew. Sind die Seiten a und b, dann ihr Zwischenwinkel γ bekannt, so erhält man

$$\text{I. } c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma} \text{ (§. 423.), oder}$$
$$= a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} \cdot 2\cos\gamma};$$

$$\text{II.} \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma, \text{ und} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha \sim \beta) = \frac{a \sim b}{a + b} \cdot \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma \text{ (§. 422, Zus.)}; \end{cases}$$

$$\text{III. } f = \tfrac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma \text{ (§. 172. und §. 426, A.).}$$

Anm. 1. Die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$, aus welcher die Formel I. folgt, läßt sich auf dreifache Art für logarithmische Berechnung tauglich machen. Setzt man nämlich

a) $\cos\gamma = 1 - 2\sin^2 {}^1/_2\gamma$ (§. 413, X.), so verwandelt sie sich in

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 4ab \cdot \sin^2 {}^1/_2\gamma$$
$$= (a \sim b)^2 + 4ab \cdot \sin^2 {}^1/_2\gamma$$
$$= (a \sim b)^2 \left(1 + \frac{4ab \cdot \sin^2 {}^1/_2\gamma}{(a \sim b)^2}\right).$$

Dieser Bruch mag nun was immer für einen Werth haben, so gibt es jedenfalls einen Winkel, dessen quadrirte Tangente ihm gleich ist (§. 404, Zus. 2.). Nimmt man daher einen Hilfswinkel φ, und setzt

$$\frac{4ab \cdot \sin^2 {}^1/_2\gamma}{(a \sim b)^2} = \operatorname{tg}^2\varphi, \text{ also } \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin {}^1/_2\gamma}{a \sim b} \cdot \sqrt{ab}, \text{ so wird}$$

$$c^2 = (a \sim b)^2 (1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = \frac{(a - b)^2}{\cos^2\varphi} \text{ (§. 411, IX.); mithin}$$

$$c = \frac{a \sim b}{\cos\varphi}, \text{ wobei } \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin {}^1/_2\gamma}{a \sim b} \cdot \sqrt{ab} \text{ ist.}$$

b) Setzt man $\cos\gamma = 2\cos^2 {}^1/_2\gamma - 1$ (§. 413, XIII.), so erhält man auf ähnliche Art wie oben

$$c^2 = (a + b)^2 \left(1 - \frac{4ab \cdot \cos^2 {}^1/_2\gamma}{(a + b)^2}\right)$$
$$= (a + b)^2 (1 - \sin^2\psi) = (a + b)^2 \cdot \cos^2\psi,$$

wenn man vorstehenden Bruch $= \sin^2\psi$ setzt. Man erhält somit

$$c = (a + b) \cdot \cos\psi, \text{ wobei } \sin\psi = \frac{2\cos {}^1/_2\gamma}{a + b} \cdot \sqrt{ab} \text{ ist.}$$

c) Statt der Formel I. kann man (nach §. 410. und §. 413, XII.) auch schreiben:

$$c^2 = (a^2+b^2)(\sin^2 {}^1/_2\gamma + \cos^2 {}^1/_2\gamma) - 2ab(\cos^2 {}^1/_2\gamma - \sin^2 {}^1/_2\gamma)$$
$$= (a+b)^2 . \sin^2 {}^1/_2\gamma + (a \sim b)^2 . \cos^2 {}^1/_2\gamma$$
$$= (a+b)^2 . \sin^2 {}^1/_2\gamma \left(1 + [\frac{a \sim b}{a+b} . \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma]^2\right).$$

Setzt man den letzten Bruch $= \operatorname{tg}^2 x$, so ergibt sich, wie oben a):

$$c = \frac{(a+b)\sin {}^1/_2\gamma}{\cos x}, \text{ wofür } \operatorname{tg} x = \frac{a \sim b}{a+b} . \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma \text{ ist.}$$

Diese Formeln eignen sich dann am besten, wenn nebst c auch die Winkel α und β zu suchen sind; denn hier ist offenbar der Hilfswinkel x nichts anderes, als ${}^1/_2(\alpha \sim \beta)$.

Anm. 2. Ist aus der Formel II. ${}^1/_2(\alpha \sim \beta)$ bestimmt, so hat man auch α und β; denn es ist (für $\alpha > \beta$):

$${}^1/_2(\alpha+\beta) + {}^1/_2(\alpha-\beta) = \alpha, \text{ und}$$
$${}^1/_2(\alpha+\beta) - {}^1/_2(\alpha-\beta) = \beta.$$

§. 430.

Aufg. Aus den drei Seiten eines Dreieckes die Winkel und den Inhalt desselben zu berechnen.

Aufl. Wird der halbe Umfang des Dreieckes, d. i. $\frac{1}{2}(a+b+c) = s$ gesetzt, so erhält man für einen der Winkel, und analog für die andern:

$$\text{I. } \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \text{ oder}$$

$$\text{II. } \cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \text{ oder}$$

$$\text{III. } \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \text{ oder}$$

$$\text{IV. } \sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}; \text{ dann}$$

$$\text{V. } f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bew. Es ist $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos\alpha$ (§. 423.); daher

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Formel §. 413, XI.; so erhält man

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2bc}, \text{ oder}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc},$$

Setzt man nun $a + b + c = 2s$, also $a + b - c = 2(s - c)$ und $a - b + c = 2(s - b)$, so wird

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{2(s-b) \, . \, 2(s-c)}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}; \text{ also}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich die Formel II., wenn man obigen Werth von $\cos \alpha$ in die Gleichung $2 . \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = 1 + \cos \alpha$ (§. 413, XIV.) substituirt; ferner ist die Formel III. der Quotient, und IV. das doppelte Produkt der Formeln I. und II.

Hinsichtlich der Formel V. hat man $f = \frac{1}{2} b . BD$ (Fig. 207.). Es ist aber $BD = c . \sin \alpha$; also $f = \frac{1}{2} bc . \sin \alpha$. Setzt man statt $\sin \alpha$ seinen Werth aus IV., so folgt die Gleichung V. (Vgl. §. 182.)

Anm. Sind alle drei Winkel zu bestimmen, so wendet man am vortheilhaftesten die Formel III. an, da nach dieser für alle nur vier Logarithmen aufzusuchen sind.

§. 431.

Aufg. Aus einer Seite eines Dreieckes und zwei Winkeln die übrigen Stücke zu berechnen.

Aufl. u. Bew. Hat man die Seite b, und entweder a) die ihr anliegenden Winkel α und γ, oder b) α und β als gegebene Stücke; so ergibt sich (mit Rücksicht auf §. 77. und §. 406, Zus.):

$$\text{I. } \beta = 180^0 - (\alpha + \gamma), \text{ oder } \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta);$$

$$\left.\begin{aligned} \text{II. } a &= \frac{b . \sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{b . \sin \alpha}{\sin \beta}; \\ \text{III. } c &= \frac{b . \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{b . \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \end{aligned}\right\} \text{(§. 421.)};$$

$$\text{IV. } f = \tfrac{1}{2} b^2 . \frac{\sin \alpha . \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} = \tfrac{1}{2} b^2 . \frac{\sin \alpha . \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta},$$

indem $f = \frac{1}{2} b . BD$, und $BD = c . \sin \alpha$ ist.

§. 432.

Aufg. Ein Dreieck aufzulösen, wenn zwei Seiten und der der größern von ihnen gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

Aufl. u. Bew. Sind die Seiten a und b, dann der Winkel α bekannt, ferner $a > b$, so hat man

I. $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$ (§. 421.); dann wird

II. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$;

III. $c = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}$, (§. 421. und §. 406, Zus.);

IV. $f = \frac{1}{2} a b \cdot \sin(\alpha + \beta)$,

da die Höhe $BD = a \sin\gamma = a \sin(\alpha + \beta)$ ist.

Anm. 1. Wollte man die Seite c unabhängig von β bestimmen, so berechne man den Hilfswinkel φ aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{(a+b)(a-b)}}{b \cdot \cos\alpha}; \text{ dann ist } c = \operatorname{cotg} {}^1/_2 \varphi \cdot \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

Man erhält diese Formeln auf folgende Weise: Löst man die Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ für c auf, so wird

$$c = b \cdot \cos\alpha + \sqrt{b^2 \cdot \cos^2\alpha + (a^2 - b^2)} \text{ *)}$$

$$= b \cdot \cos\alpha + b \cos\alpha \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2 \cos^2\alpha}}$$

$$= b \cdot \cos\alpha (1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}), \text{ wenn man}$$

$\frac{a^2 - b^2}{b^2 \cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\varphi$, also $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b \cos\alpha}$ setzt. Dadurch wird

$$c = \frac{b \cdot \cos\alpha}{\cos\varphi}(1 + \cos\varphi) = \frac{b \cdot \cos\alpha}{\operatorname{cotg}\varphi} \cdot \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi} \text{ (§. 411, IV.)}$$

$$= b \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{cotg} {}^1/_2 \varphi \text{ (§. 413, XVI.)}$$

$$= \operatorname{cotg} {}^1/_2 \varphi \cdot \sqrt{(a+b)(a-b)},$$

wenn man für $\operatorname{tg}\varphi$ seinen obigen Werth substituirt.

Anm. 2. Wäre $a > b$ und der Winkel β gegeben, so ist die Auflösung unbestimmt, da es dann zwei verschiedene Dreiecke ABC und A'BC (Fig. 109.) gibt, welche die angegebene Eigenschaft haben.

---

*) Das Zeichen „—" vor dem Wurzelzeichen ist unbrauchbar, wenn $a > b$ gegeben ist; was sich leicht darthun läßt, indem c, also auch sein Werth, d. i. $b \cos\alpha - \sqrt{b^2 \cos^2\alpha + (a^2 - b^2)} > 0$ sein muß.

Anhang. Theilung der Kreisperipherie in gleiche Theile.

§. 433.

Aufg. Den Umfang eines Kreises (annähernd) in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen. (Vgl. Note zu §. 237.).

Aufl. Man beschreibe (Fig. 210.) über einem Diameter AB das gleichseitige $\triangle ABD$, theile sodann AB in die gegebene Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch D und den zweiten Theilungspunkt (E) die Gerade DF; so ist arc AF entweder genau oder annähernd einer der verlangten Theile.

Bew. Soll die Peripherie allgemein in n gleiche Theile getheilt sein, so muß arc AF, oder, wenn man CF zieht, der Centriwinkel $\varphi = 360^0 : n$ sein. Fällt man $FG \perp AB$, und zieht CD, so ist $\triangle FEG \sim CDE$; daher

$$FG \div EG = CD \div CE, \text{ oder}$$
$$FG \div (CG - CE) = CD \div CE.$$

Nun ist aber $CE = AC - AE$, oder, da AB in n gleiche Theile getheilt, und E der zweite Theilungspunkt ist,

$$CE = AC - \frac{2.2AC}{n} = \frac{AC}{n}.(n-4); \text{ mithin}$$

$$FG \div (CG - AC.\frac{n-4}{n}) = CD \div AC.\frac{n-4}{n}, \text{ oder,}$$

wenn man der Kürze wegen den Quotienten $(n-4):n = q$, dann $CD = \frac{1}{2}AB\sqrt{3} = AC\sqrt{3}$ setzt (§. 181, Zus.):

$$FG \div (CG - AC.q) = AC.\sqrt{3} \div AC.q. \text{ Hieraus folgt}$$

$$\frac{FG}{AC} \div (\frac{CG}{AC} - q) = \sqrt{3} \div q, \text{ d. i.}$$

$$\sin\varphi \div (\cos\varphi - q) = \sqrt{3} \div q; \text{ folglich}$$

$$\cos\varphi.\sqrt{3} - q\sqrt{3} = q.\sin\varphi.$$

Dividirt man beiderseits durch $q.\cos\varphi$, so wird

$$\frac{\sqrt{3}}{q} - \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi} = \text{tg}\,\varphi;$$ also ist auch

$$\frac{3}{q^2} - \frac{6}{q\cos\varphi} + \frac{3}{\cos^2\varphi} = \text{tg}^2\varphi = \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch gehörige Reduktion

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{3}{q\cos\varphi} = -\frac{q^2+3}{2q^2},$$ und hieraus

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{3-\sqrt{3-2q^2}}{2q};$$ mithin

$$\cos\varphi = \frac{2q}{3-\sqrt{3-2q^2}} = \frac{2(n-4)}{3n-\sqrt{n(n+16)-32}},$$

wenn man wieder statt q seinen Werth setzt und reduzirt.

Substituirt man in diese Gleichung statt n successive die Werthe 3, 4, 5, 6 ꝛc., so wird φ nur für 3, 4 und 6 genau dem Centriwinkel der betreffenden Figur gleich, für alle übrigen Fälle gewährt das Verfahren nur Annäherung.

Z. B. der Centriwinkel des Pentagons beträgt 72°. Nach obiger Formel ergibt sich um 2′46·2″ zu wenig; denn es wird

$$\cos\varphi = \frac{2}{15-\sqrt{73}} = \frac{15+\sqrt{73}}{76} = 0\cdot3097895,$$ woraus

$$\lg\cos\varphi = 0\cdot49106 - 1 = 9\cdot49106 = \lg\cos 71^0\,57'13\cdot8''$$ folgt.

II. Kap. Sphärische Trigonometrie.

a) Grundgleichungen zur Auflösung sphärischer Dreiecke.

§. 434.

Lehrs. In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Thes. $\sin a \div \sin b \div \sin c = \sin\alpha \div \sin\beta \div \sin\gamma$.

Bew. Construirt man zu dem gegebenen sphärischen $\triangle$ ABC (Fig. 211.) das zugehörige körperliche $\triangle$ MABC, so ist $\measuredangle$ BMC = a,

AMC = b und AMB = c (§. 218, Zus.), dann ∡ AM = α, ∡ BM = β und ∡ CM = γ (§. 349, 4.).

Fällt man nun BD ⊥ pl. AMC, dann BE ⊥ AM und BF ⊥ CM, zieht DE und DF, so ist auch DE ⊥ AM und DF ⊥ CM (§. 279, Zus.); also ∡ BED = ∡ AM = α und ∡ BFD = ∡ CM = γ.

Nun hat man in den rechtwinkligen Dreiecken BDE und BEM:

a) $BD = BE . \sin BED = BE . \sin\alpha$, dann

b) $BE = BM . \sin BMA = BM . \sin c$; daher

1) $BD = BM . \sin c . \sin\alpha$.

Ebenso erhält man in den Dreiecken BDF und BFM.

$BD = BF . \sin BFD = BM . \sin BMC . \sin BFD$, d. i.

2) $BD = BM . \sin a . \sin\gamma$.

Durch Comparation der Gleichungen 2) und 1) folgt

$\sin a . \sin\gamma = \sin c . \sin\alpha$, und hieraus

$\sin a \div \sin c = \sin\alpha \div \sin\gamma$. — Die Proportion

$\sin a \div \sin b = \sin\alpha \div \sin\beta$

ergibt sich ebenso, wenn aus C auf pl. AMB ein Loth gefällt wird.

§. 435.

Lehrs. In jedem sphärischen Dreiecke ist der Cosinus einer Seite gleich dem Produkte der Cosinus der beiden andern Seiten, mehr dem Produkte aus den Sinus dieser letztern in den Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Thes. $\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos\alpha$.

Bew. Construirt man wieder das dem gegebenen sphärischen △ ABC (Fig. 212.) entsprechende körperliche △ MABC, zieht BD ⊥ AM, ebenso DE ⊥ AM und BE, so ist ∡ BDE = ∡ AM = α; ferner hat man

$\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2 - 2BD . DE . \cos\alpha$ (§. 423.), ebenso

$\overline{BE}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{EM}^2 - 2BM . EM . \cos a$; mithin

1) $\overline{BM}^2 + \overline{EM}^2 - 2BM . EM . \cos a = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2 - 2BD . DE . \cos\alpha$.

Da aber ∡ BDM = R = EDM ist; so folgt

$\overline{BM}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DM}^2$, und

$\overline{EM}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DM}^2$; mithin

2) $\overline{BM}^2 + \overline{EM}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2 + 2\overline{DM}^2$.

Durch Subtraktion der Gleichung 1) von 2) erhält man

$$2BM.EM.\cos a = 2\overline{DM}^2 + 2BD.DE.\cos\alpha.$$

Hieraus folgt durch Division mit 2BM.EM:

$$\cos a = \frac{DM}{EM}.\frac{DM}{BM} + \frac{DE}{EM}.\frac{BD}{BM}.\cos\alpha, \text{ d. i.}$$

$$= \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos\alpha.$$

§. 436.

Lehrs. In jedem sphärischen Dreiecke ist das Produkt aus der Cotangente einer Seite in den Sinus einer andern gleich dem Produkte aus dem Cosinus der letztern und dem Cosinus ihres Zwischenwinkels, mehr dem Produkte aus dem Sinus dieses letztern in die Cotangente des Gegenwinkels der ersten Seite.

Thes. $\mathrm{cotg}\, a.\sin b = \cos b.\cos\gamma + \sin\gamma.\mathrm{cotg}\,\alpha.$

Bew. Nimmt man die Formeln für cos a und cos c, wie sie sich §. 435. ergaben, und substituirt das Aequivalent des letztern in die Gleichung für cos a, so wird

$$\cos a = \cos b(\cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos\gamma) + \sin b.\sin c.\cos\alpha$$

$$= \cos a.\cos^2 b + \sin a.\sin b.\cos b.\cos\gamma + \sin b.\sin c.\cos\alpha, \text{ oder}$$

$$\cos a - \cos a.\cos^2 b = \sin a.\sin b.\cos b.\cos\gamma + \sin b.\sin c.\cos\alpha$$

$$\cos a(1 - \cos^2 b) = \sin a.\sin b.\cos b.\cos\gamma + \sin b.\sin c.\cos\alpha.$$

Setzt man $1 - \cos^2 b = \sin^2 b$ (§. 410, I.), und dividirt dann die Gleichung durch sin a.sin b, so ergibt sich

$$\mathrm{cotg}\, a.\sin b = \cos b.\cos\gamma + \frac{\sin c}{\sin a}.\cos\alpha.$$

Nun folgt aber aus §. 434.: $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$; daher wird durch Substitution und Division mit $\sin\alpha$:

$$\mathrm{cotg}\, a.\sin b = \cos b.\cos\gamma + \sin\gamma.\mathrm{cotg}\,\alpha.$$

Zus. Aus vorstehender Formel folgt durch bloße Transposition:

$$\mathrm{cotg}\,\alpha.\sin\gamma = -\cos\gamma.\cos b + \sin b.\mathrm{cotg}\, a, \text{ d. h. } -?$$

§. 437.

Lehrs. In jedem sphärischen Dreiecke ist der Cosinus eines Winkels gleich dem negativen Produkte der Cosinus der beiden andern Winkel, mehr dem Produkte aus den Sinus dieser letztern und dem Cosinus ihrer Zwischenseite.

Thes. $\cos\alpha = -\cos\beta . \cos\gamma + \sin\beta . \sin\gamma . \cos a$.

Bew. Nach §. 436, Zus. hat man

$$\cot g\,\alpha . \sin\gamma = -\cos\gamma . \cos b + \sin b . \cot g\,a.$$

Substituirt man in diese Gleichung den Werth von $\sin b$ aus der Proportion $\sin a \div \sin b = \sin\alpha \div \sin\beta$, so folgt

1) $\cos\alpha . \sin\gamma = -\sin\alpha . \cos\gamma . \cos b + \sin\beta . \cos a$.

Mit dieser Gleichung analog findet man auch

2) $\cos\beta . \sin\gamma = -\sin\beta . \cos\gamma . \cos a + \sin\alpha . \cos b$.

Multiplizirt man die Gleichung 2) mit $\cos\gamma$ und addirt sie dann zu 1), so folgt

$$(\cos\alpha + \cos\beta . \cos\gamma)\sin\gamma = \sin\beta . \cos a\,(1 - \cos^2\gamma)$$
$$= \sin\beta . \sin^2\gamma . \cos a;$$ also

wenn man durch $\sin\gamma$ abkürzt und transponirt

$$\cos\alpha = -\cos\beta . \cos\gamma + \sin\beta . \sin\gamma . \cos a.$$

§. 438.

Lehrs. Zwischen den drei Seiten eines sphärischen Dreieckes und zwei Winkeln desselben, sowie umgekehrt, finden folgende Relationen Statt:

$$\text{I.}\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha \sim \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} . \operatorname{tg}\frac{1}{2}c, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a \sim b) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha \sim \beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} . \operatorname{tg}\frac{1}{2}c; \end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a \sim b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} . \cot g\frac{1}{2}\gamma, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha \sim \beta) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a \sim b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} . \cot g\frac{1}{2}\gamma. \end{cases}$$

Bew. I. Aus den Proportionen §. 434. folgt:

$\sin a . \sin\gamma = \sin c . \sin\alpha$, und

$\sin b . \sin\gamma = \sin c . \sin\beta$; daher ist auch

1) $(\sin a + \sin b)\sin\gamma = (\sin\alpha + \sin\beta)\sin c$, und

2) $(\sin a \sim \sin b)\sin\gamma = (\sin\alpha \sim \sin\beta) . \sin c$

Ferner hat man nach §. 436.:

$\cot g\,a . \sin c = \cos c . \cos\beta + \sin\beta . \cot g\,\alpha$, und

$\cot g\,b . \sin c = \cos c . \cos\alpha + \sin\alpha . \cot g\,\beta$.

Eliminirt man aus diesen Gleichungen $\sin c$, indem man in erstere seinen Werth aus $\sin a \div \sin c = \sin\alpha \div \sin\gamma$, in letztere

aus $\sin b \div \sin c = \sin\beta \div \sin\gamma$ substituirt, so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\cos a . \sin\gamma = \cos c . \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta, \text{ und}$$
$$\cos b . \sin\gamma = \cos c . \cos\alpha . \sin\beta + \sin\alpha . \cos\beta; \text{ also auch}$$

3) $(\cos a + \cos b)\sin\gamma = (\sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta)(1 + \cos c)$
$= \sin(\alpha + \beta) . (1 + \cos c).$

Dividirt man die Gleichungen 1) und 2) durch 3), so erhält man folgende:

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} . \frac{\sin c}{1 + \cos c}, \text{ und}$$
$$\frac{\sin a \sim \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\sin\alpha \sim \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} . \frac{\sin c}{1 + \cos c},$$

von denen die ersten Seiten mit den oben unter I. aufgestellten nach §. 418, IV. und V., die zweiten nach §. 417, V. und VI., dann §. 413, XVI. identisch sind.

II. Schreibt man die obigen Gleichungen 1) und 2) umgekehrt, so hat man

a) $(\sin\alpha + \sin\beta)\sin c = (\sin a + \sin b)\sin\gamma$,
b) $(\sin\alpha \sim \sin\beta)\sin c = (\sin a \sim \sin b)\sin\gamma$.

Eliminirt man ferner aus den Gleichungen

$$\operatorname{cotg} a . \sin b = \cos b . \cos\gamma + \sin\gamma . \operatorname{cotg}\alpha, \text{ und}$$
$$\operatorname{cotg} b . \sin a = \cos a . \cos\gamma + \sin\gamma . \operatorname{cotg}\beta \text{ (§. 436.)}$$

den Faktor $\sin\gamma$ durch Substitution seiner Werthe aus §. 434.; so ergibt sich auf dieselbe Art, wie oben:

$$\cos\alpha . \sin c = \cos a . \sin b - \sin a . \cos b . \cos\gamma, \text{ und}$$
$$\cos\beta . \sin c = \sin a . \cos b - \cos a . \sin b . \cos\gamma; \text{ also}$$

c) $(\cos\alpha + \cos\beta)\sin c = \sin(a + b)(1 - \cos\gamma)$.

Werden nun wieder die Gleichungen a) und b) durch c) dividirt, so erhält man folgende

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin(a + b)} . \frac{\sin\gamma}{1 - \cos\gamma}, \text{ und}$$
$$\frac{\sin\alpha \sim \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{\sin a \sim \sin b}{\sin(a + b)} . \frac{\sin\gamma}{1 - \cos\gamma},$$

welche mit den oben II. aufgestellten einerlei sind (§. 418., IV. und V.; §. 417., V. und VI.; §. 413., XV.).

Anm. Die vier Formeln dieses Lehrsatzes sind bekannt unter dem Namen „die Neper'schen Gleichungen oder Analogien."

b) Auflösung rechtwinkliger und gleichschenkliger sphärischer Dreiecke.

§. 439.

Erkl. 1. Da bei rechtwinkligen sphärischen Dreiecken der rechte Winkel immer an sich gegeben ist, so genügen zur Berechnung der fehlenden (wie bei ebenen Dreiecken) zwei gegebene Stücke, die aber auch zwei Winkel sein können.

2. Setzt man in allen Formeln, die sich nach den §§. 434. bis 437. ergeben und in denen der Winkel γ vorkommt, $\gamma = 90^0$, also $\sin\gamma = 1$ und $\cos\gamma = 0$, so erhält man folgende 6 Formeln, welche alle Fälle über die Auflösung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke enthalten:

I $\sin a = \sin c \,.\, \sin\alpha$ (§. 434.),	IV. $\operatorname{cotg} c = \operatorname{cotg} a \,.\, \cos\beta$ (§. 436.),
II. $\cos c = \cos a \,.\, \cos b$ (§. 435.),	V. $\cos\alpha = \cos a \,.\, \sin\beta$ } (§. 437.).
III. $\operatorname{cotg} a \,.\, \sin b = \operatorname{cotg}\alpha$ (§. 436.),	VI. $\operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta = \cos c$ } (§. 437.).

3. Die Auflösung gleichschenkliger sphärischer Dreiecke reduzirt sich aus demselben Grunde, wie bei ebenen, auf die der rechtwinkligen Dreiecke (§. 424. 2.).

§. 440.

Aufg. Aus zwei Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes die dritte und die beiden schiefen Winkel zu berechnen.

Aufl. u. Bew. Sind a und b die Katheten, c die Hypotenuse des Dreieckes, also $\gamma = 90^0$, so erhält man

A.) wenn die Katheten a und b gegeben sind:

I. $\cos c = \cos a \,.\, \cos b$ (II.); *)

II. $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg} a \,.\, \sin b$ }

III. $\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg} b \,.\, \sin a$ } (III.).

B.) Ist die Hypotenuse c und eine Kathete a gegeben, so wird

I. $\cos b = \cos c : \cos a$ (II.);

II. $\sin\alpha = \sin a : \sin c$ (I.);

III. $\cos\beta = \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{cotg} c$ (IV.).

Anm. In der Formel II. ist $\alpha \lesseqgtr 90^0$ zu nehmen, wenn $a \lesseqgtr 90^0$ ist. Denn es ist (nach Formel V.) $\cos\alpha = \cos a \,.\, \sin\beta$; da nun β stets positiv ist, so müssen a und α gleichnamig sein.

*) Die in den §§. 440 — 442. durch die Zahlen I. — VI. angegebenen Hinweisungen beziehen sich durchgängig auf die §. 439, 2. angeführten Formeln.

§. 441.

Aufg. Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck aufzulösen, wenn eine Seite und ein schiefer Winkel desselben bekannt sind.

Aufl. u. Bew. Es sind hier drei Fälle zu unterscheiden.

A.) Ist die Hypotenuse c und der Winkel α gegeben; so wird

I. $\sin a = \sin c \,.\, \sin\alpha$ (I.);

II. $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \,.\, \cos\alpha$ (IV.);

III. $\operatorname{cotg}\beta = \cos c \,.\, \operatorname{tg}\alpha$ (VI.).

B.) Ist eine Kathete a und der anliegende Winkel β bekannt; so erhält man:

I. $\operatorname{tg} b = \sin a \,.\, \operatorname{tg}\beta$ (III.);

II. $\operatorname{cotg} c = \operatorname{cotg} a \,.\, \cos\beta$ (IV.);

III. $\cos\alpha = \cos a \,.\, \sin\beta$ (V.).

C.) Wenn eine Kathete a und ihr Gegenwinkel α gegeben ist; so ergibt sich

I. $\sin b = \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$ (III.);

II. $\sin c = \sin a : \sin\alpha$ (I.);

III. $\sin\beta = \cos\alpha : \cos a$ (V.).

Anm. Die unbekannten Stücke sind hier sämmtlich durch ihren Sinus ausgedrückt; dadurch wird die Aufgabe unbestimmt, und hat zwei Auflösungen.

§. 442.

Aufg. Aus den beiden schiefen Winkeln eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes die drei Seiten desselben zu bestimmen.

Aufl. u. Bew. Aus den Winkeln α und β findet sich

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. } \cos a = \cos\alpha : \sin\beta \\ \text{II. } \cos b = \cos\beta : \sin\alpha\end{array}\right\}\text{(V.)};$$

III. $\cos c = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta$ (VI.). *)

---

*) Alle Fälle über die Auflösung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke sind, da von den in jedem Falle vorkommenden drei Stücken eines als Mittelstück, die andern als an- oder gegenüberliegende betrachtet werden können, in folgenden zwei sogenannten Neper'schen Regeln enthalten:

„Der Cosinus des Mittelstückes ist gleich I. dem Produkte der Cotangenten „der anliegenden, II. dem Produkte der Sinus der gegenüberliegenden Stücke." Dabei ist nur zu beachten, daß die Katheten in Bezug auf die Hypotenuse als

§. 443.

Aufg. Aus den Seiten eines gleichschenkligen sphärischen Dreieckes dessen Winkel, und umgekehrt zu berechnen.

Aufl. u. Bew. Bezeichnet a den Schenkel und b die Basis des Dreieckes; so erhält man

A.) wenn die Seiten a und b gegeben sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \cos\alpha = \operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b \\ \text{II.} & \sin\tfrac{1}{2}\beta = \sin\tfrac{1}{2}b : \sin a \end{array}\right\} \text{(nach §. 440, B.);}$$

B.) wenn die Winkel α und β bekannt sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \cos a = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta, \\ \text{II.} & \cos\tfrac{1}{2}b = \cos\tfrac{1}{2}\beta : \sin\alpha, \end{array}\right\} \text{(nach §. 442.).}$$

§. 444.

Aufg. Aus einer Seite und einem Winkel eines gleichschenkligen sphärischen Dreieckes die beiden andern Stücke zu finden.

Aufl. u. Bew. Ist wieder a der Schenkel, b die Basis; so wird

A.) wenn a und α oder β gegeben ist (nach §. 441, A.):

I. $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b = \operatorname{tg} a \,.\, \cos\alpha$, oder $\sin\tfrac{1}{2}b = \sin a \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\beta$;

II. $\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \cos a$ „ $\operatorname{cotg}\alpha = \cos a \,.\, \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta$;

B.) wenn b und der Winkel α bekannt ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \operatorname{tg} a = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b : \cos\alpha \\ \text{II.} & \cos\tfrac{1}{2}\beta = \cos\tfrac{1}{2}b \,.\, \sin\alpha \end{array}\right\} \text{(nach §. 441, B.);}$$

C.) wenn b und der Winkel β gegeben ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \sin a = \sin\tfrac{1}{2}b : \sin\tfrac{1}{2}\beta \\ \text{II.} & \sin\alpha = \cos\tfrac{1}{2}\beta : \cos\tfrac{1}{2}b \end{array}\right\} \text{(nach §. 441, C.).*)}$$

---

gegenüberliegend zu betrachten, und daß statt derselben ihre Complemente zu nehmen sind. — Ist z. B. a und β gegeben, so wird (nach Regel I.):

$$\cos(90 - a) = \operatorname{cotg}(90 - b) \,.\, \operatorname{cotg}\beta, \text{ oder}$$

$$\sin a = \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{cotg}\beta; \text{ daher } \operatorname{tg} b = \sin a \,.\, \operatorname{tg}\beta.$$

Ferner ergibt sich (nach Regel II.):

$$\cos\alpha = \sin(90 - a) \,.\, \sin\beta; \text{ also } \cos\alpha = \cos a \,.\, \sin\beta.$$

*) Alle Fälle über die Auflösung gleichschenkliger sphärischer Dreiecke enthalten folgende vier Formeln, die sich leicht mittelst der Neper'schen Regeln herstellen lassen:

I. $\cos\alpha = \operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{tg}{}^1/_2 b$,	III. $\cos a = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}{}^1/_2\beta$,
II. $\sin{}^1/_2 b = \sin a \,.\, \sin{}^1/_2\beta$,	IV. $\cos{}^1/_2\beta = \cos{}^1/_2 b \,.\, \sin\alpha$.

c) Auflösung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke.

§. 445.

Aufg. Aus den drei Seiten eines sphärischen Dreieckes die Winkel desselben zu berechnen.

Aufl. Setzt man die halbe Summe der drei Seiten, d. i. $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, so ergibt sich für einen Winkel, und analog für die übrigen:

$$\text{I. } \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}, \text{ oder}$$

$$\text{II. } \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-a)}{\sin b\cdot\sin c}}, \text{ oder}$$

$$\text{III. } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)}}.$$

Bew. Aus der §. 435. entwickelten Gleichung folgt

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\cos\alpha$ in §. 413, XI., so wird

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin b\cdot\sin c + \cos b\cdot\cos c - \cos a}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b\cdot\sin c} \quad (\text{§. 414, II.})$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\cdot\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\cdot\sin c} \quad (\text{§.418, II.})$$

$$= \frac{2\sin(s-c)\cdot\sin(s-b)}{\sin b\cdot\sin c},$$

wenn man $a+b+c=2s$, also $a+b-c=2(s-c)$ und $a-b+c=2(s-b)$ setzt. — Wird nun noch durch 2 abgekürzt, und dann radizirt, so hat man die Formel I.

Auf ähnliche Weise ergibt sich die Formel II., wenn man den Werth von $\cos\alpha$ in §. 413, XIV. substituirt. Die Formel III. ist der Quotient aus I. getheilt durch II.

Anm. Die Anm. §. 430. hinsichtlich der Formel III. gilt auch hier.

§. 446.

Aufg. Aus zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes und ihrem Zwischenwinkel die übrigen Stücke zu finden.

Aufl. u. Bew. Sind a, b und γ gegeben, so ist

I. $\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos\gamma$ (§. 435.);

$$\text{II.} \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a\sim b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \,.\, \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma, \text{ und} \\[2ex] \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha\sim\beta) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a\sim b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \,.\, \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma \text{ (§. 438, II.).} \end{cases}$$

Anm. 1. Um die Seite c ganz mit Hilfe der Logarithmen bestimmen zu können, läßt sich die Formel I. mit Beiziehung eines Hilfswinkels φ in folgende umwandeln:

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos\varphi} \,.\, \cos(b\sim\varphi), \text{ wobei } \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma \text{ ist.}$$

Denn aus der Formel I. folgt

$$\cos c = \cos a(\cos b + \sin b \,.\, \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma).$$

Setzt man nun $\operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma = \operatorname{tg}\varphi$, so wird

$$\cos c = \cos a(\cos b + \sin b \,.\, \operatorname{tg}\varphi), \text{ oder (nach §. 411, I.):}$$

$$= \frac{\cos a}{\cos\varphi}(\cos b \,.\, \cos\varphi + \sin b \,.\, \sin\varphi) = \frac{\cos a}{\cos\varphi} \,.\, \cos(b\sim\varphi). \text{*)}$$

Anm. 2. Ist der Winkel γ sehr klein (unter 2^0), so findet man c genauer aus der Formel:

$$\sin{}^1/_2 c = \frac{\sin{}^1/_2(a\sim b)}{\cos\psi}, \text{ wofür } \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin{}^1/_2\gamma\sqrt{\sin a \,.\, \sin b}}{\sin{}^1/_2(a\sim b)} \text{ ist.}$$

Man erhält dieselben, indem man in I. statt $\cos c$ und $\cos\gamma$ ihre Werthe aus §. 413, X. substituirt, und dann ganz ähnlich wie in §. 429, Anm. 1. a) verfährt.

Anm. 3. Die Winkel α und β ergeben sich unabhängig von einander bloß aus den gegebenen Stücken, durch folgende Formeln:

---

*) Die Einführung des Hilfswinkels φ ist gleichbedeutend mit der Zerlegung des Dreieckes ABC (Fig. 213.) in zwei rechtwinklige durch das Perpendikel $BD = h$. Denn ist arc $CD = \varphi$, also $AD = b - \varphi$; so hat man 1) im $\triangle$ BDC: $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} a \,.\, \cos\gamma$ (§. 441, A, II.); ferner $\cos h = \cos a : \cos\varphi$ (§. 440, B., I.); dann wird 2) in dem $\triangle$ ABD:

$$\cos c = \cos h \,.\, \cos(b-\varphi) = \frac{\cos a}{\cos\varphi} \,.\, \cos(b-\varphi).$$

$$1)\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\gamma\,.\,\sin x}{\sin(b-x)},\ \text{wobei}\ \mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,a\,.\,\cos\gamma,$$

$$2)\ \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{tg}\,\gamma\,.\,\sin y}{\sin(a-y)},\ \ „\ \ \mathrm{tg}\,y = \mathrm{tg}\,b\,.\,\cos\gamma\ \text{ist.}$$

Denn aus der §. 436, Zus. aufgestellten Gleichung folgt durch Multiplication mit $\mathrm{tg}\,a$:

$$\mathrm{cotg}\,\alpha\,.\,\sin\gamma\,.\,\mathrm{tg}\,a = \sin b - \cos b\,.\,\cos\gamma\,.\,\mathrm{tg}\,a.$$

Setzt man nun $\mathrm{tg}\,a\,.\,\cos\gamma = \mathrm{tg}\,x = \sin x : \cos x$, so wird

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\sin b\,.\,\cos x - \cos b\,.\,\sin x}{\mathrm{tg}\,a\,.\,\sin\gamma\,.\,\cos x} = \frac{\sin(b-x)}{\mathrm{tg}\,a\,.\,\sin\gamma\,.\,\cos x};\ \text{also}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,a\,.\,\sin\gamma\,.\,\cos x}{\sin(b-x)} = \frac{\mathrm{tg}\,\gamma\,.\,\sin x}{\sin(b-x)},$$

da $\mathrm{tg}\,a = \mathrm{tg}\,x : \cos\gamma = \sin x : \cos x\,.\,\cos\gamma$ ist.

Auf gleichem Wege findet man die Formeln 2) mittelst der Gleichung

$$\mathrm{cotg}\,\beta\,.\,\sin\gamma = -\cos\gamma\,.\,\cos a + \sin a\,.\,\mathrm{cotg}\,b.$$

§. 447.

Aufg. Aus zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes und dem Gegenwinkel der einen die übrigen Stücke zu berechnen.

Aufl. u. Bew. Ist a, b und α gegeben, so hat man (nach §. 438.):

$$\text{I.}\ \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\,.\,\sin\alpha\ (\text{§. 434.});\ \text{dann wird (nach §. 438.):}$$

$$\text{II.}\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(a \sim b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\,.\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\ \text{oder}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a \sim b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\,.\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}(\alpha \sim \beta);$$

$$\text{III.}\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha \sim \beta)}\,.\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(a+b),\ \text{oder}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha \sim \beta)}\,.\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(a \sim b).$$

Anm. 1. In der Formel I. ist der Werth von β durch seinen Sinus ausgedrückt, also zweideutig. Die hieraus folgende Unbestimmtheit der Auflösung wird jedoch durch folgende Umstände eingeschränkt: Es ist nämlich:

a) $\beta < 90^0$, wenn $\begin{cases} 1)\ \alpha < 90^0 \text{ und } a > b, \\ 2)\ \alpha > 90^0,\ b < 90^0, \text{ und } a+b < 180^0 \text{ ist;} \end{cases}$

b) $\beta > 90^0$, wenn $\begin{cases} 1)\ \alpha > 90^0 \text{ und } a < b, \\ 2)\ \alpha < 90^0,\ b > 90^0 \text{ und } a+b > 180^0 \text{ ist.} \end{cases}$

Die Richtigkeit der Angaben Nr. 1) folgt aus §. 313. (mit Rücksicht auf §. 350, Zus.).

Die Nr. 2) angegebenen Bedingungen stellen sich auf folgende Art dar: Es ist

$$\text{tg}\, {}^1/_2 (\alpha + \beta) = \frac{\cos {}^1/_2 (a - b)}{\cos {}^1/_2 (a + b)} . \text{cotg}\, {}^1/_2 \gamma \text{ (§. 438, II.)}.$$

In dieser Formel sind jedenfalls die Faktoren $\cos {}^1/_2 (a - b)$ und $\text{cotg}\, {}^1/_2 \gamma$ positiv (§. 311, Zus. 1.); folglich haben auch $\text{tg}\, {}^1/_2 (\alpha + \beta)$ und $\cos {}^1/_2 (a + b)$ einerlei Zeichen. Daher müssen auch die Winkel ${}^1/_2 (\alpha + \beta)$ und ${}^1/_2 (a + b)$ gleichnamig sein. Wenn nun

$a + b < 180^0$, so ist, damit gleichnamig, auch

$\alpha + \beta < 180^0$. Ist aber

$\alpha > 90^0$; so folgt

$\beta < 90^0$.

Anm. 2. Die Seite c und ihr Gegenwinkel γ lassen sich auch direkt (unabhängig von β) aus folgenden Gleichungen finden:

1) $\cos (\gamma - \varphi) = \dfrac{\text{tg}\, b . \cos \varphi}{\text{tg}\, a}$, wobei $\text{cotg}\, \varphi = \cos b . \text{tg}\, \alpha$,

2) $\cos (c - \psi) = \dfrac{\cos a . \cos \psi}{\cos b}$, " $\text{tg}\, \psi = \text{tg}\, b . \cos \alpha$ ist.

Denn es ist a) hinsichtlich des Winkels γ (nach §. 436.):

$\cos b . \cos \gamma + \sin \gamma . \text{cotg}\, \alpha = \text{cotg}\, a . \sin b$, oder

$\cos \gamma + \sin \gamma . \text{cotg}\, \alpha : \cos b = \text{cotg}\, a . \text{tg}\, b$.

Setzt man nun $\text{cotg}\, a : \cos b = \text{tg}\, \varphi$, so ergibt sich

$\cos \gamma . \cos \varphi + \sin \gamma . \sin \varphi = \text{cotg}\, a . \text{tg}\, b . \cos \varphi$, d. i.

$\cos (\gamma - \varphi) = \text{tg}\, b . \cos \varphi : \text{tg}\, a$.

b) Hinsichtlich der Seite c hat man (nach §. 435.):

$\cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos \alpha = \cos a$, und hieraus folgt auf dieselbe Weise, wie oben, die Formel 2).

§. 448.

Aufg. Aus einer Seite und den beiden ihr anliegenden Winkeln eines sphärischen Dreieckes die übrigen Stücke zu finden.

Aufl. u. Bew. Ist c, dann α und β gegeben, so hat man

$$\text{I.} \begin{cases} \text{tg}\, \frac{1}{2} (a + b) = \dfrac{\cos \frac{1}{2} (\alpha \sim \beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} . \text{tg}\, \frac{1}{2} c, \text{ und} \\ \text{tg}\, \frac{1}{2} (a \sim b) = \dfrac{\sin \frac{1}{2} (\alpha \sim \beta)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} . \text{tg}\, \frac{1}{2} c \text{ (§. 438, I.)}; \end{cases}$$

II. $\cos \gamma = - \cos \alpha . \cos \beta + \sin \alpha . \sin \beta . \cos c$ (§. 437.).

Anm. 1. Auf logarithmischem Wege findet man den Winkel γ aus

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha}{\sin\varphi} \cdot \sin(\beta - \varphi), \text{ wofür } \operatorname{cotg}\varphi = \cos c \cdot \operatorname{tg}\alpha \text{ ist.}$$

Denn aus der Gleichung III. folgt:

$$\cos\gamma = \cos\alpha(\sin\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos c - \cos\beta)$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\varphi}(\sin\beta \cdot \cos\varphi - \cos\beta \cdot \sin\varphi) = \frac{\cos\alpha}{\sin\varphi} \cdot \sin(\beta - \varphi),$$

wenn man $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos c = \operatorname{cotg}\varphi$ setzt.

Anm. 2. Die Seiten a und b ergeben sich direkt (unabhängig von einander) aus folgenden Formeln:

$$1)\ \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} c \cdot \cos x}{\cos(\beta \sim x)}, \text{ wobei } \operatorname{cotg} x = \cos c \cdot \operatorname{tg}\alpha, \text{ dann}$$

$$2)\ \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} c \cdot \cos y}{\cos(\alpha \sim y)}, \quad \text{"} \quad \operatorname{cotg} y = \cos c \cdot \operatorname{tg}\beta \text{ ist.}$$

Man erhält sie auf folgende Weise: Es ist (nach §. 436.):

$$\operatorname{cotg} a \cdot \sin c = \cos c \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \operatorname{cotg}\alpha$$

$$= \cos c(\cos\beta + \sin\beta \cdot \operatorname{cotg}\alpha : \cos c); \text{ also}$$

$$\operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg} c(\cos\beta + \sin\beta \cdot \operatorname{tg} x)$$

$$= \frac{\operatorname{cotg} c}{\cos x}(\cos\beta \cdot \cos x + \sin\beta \cdot \sin x),$$

wenn $\operatorname{cotg}\alpha : \cos c = \operatorname{tg} x$, also $\operatorname{cotg} x = \cos c : \operatorname{cotg}\alpha = \cos c \cdot \operatorname{tg}\alpha$ gesetzt wird. Dadurch wird

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos(\beta \sim x)}{\operatorname{tg} c \cdot \cos x}; \text{ also } \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} c \cdot \cos x}{\cos(\beta \sim x)}.$$

Ebenso findet sich die Formel 2) aus der Gleichung $\operatorname{cotg} b \cdot \sin c = \cos c \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta$.

§. 449.

Aufg. Aus einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel eines sphärischen Dreieckes die übrigen Stücke zu bestimmen.

Aufl. u. Bew. Ist a, dann α und β gegeben, so wird

$$\text{I. } \sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \sin a \text{ (§. 434.); dann folgt (nach §. 438.):}$$

$$\text{II. } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha\sim\beta)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha\sim\beta)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a\sim b);$$

$$\text{III. } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(a\sim b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a\sim b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha\sim\beta).$$

Anm. 1. In der Gleichung I. ist b durch seinen Sinus bestimmt, kann also einen doppelten Werth haben; die Auflösung ist daher zweideutig. Die

Unbestimmtheit wird jedoch (analog §. 447, Anm. 1. und mittelst derselben Formel) durch folgende Merkmale eingeschränkt. Es ist nämlich

$$b \lesseqgtr 90^0, \text{ wenn } \begin{cases} 1)\ a \lesseqgtr 90^0, \text{ und } \alpha \gtreqless \beta, \\ 2)\ a \gtreqless 90^0,\ \beta \lesseqgtr 90^0 \text{ und } \alpha + \beta \lesseqgtr 180^0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Anm. 2. Die Seite c und ihren Gegenwinkel γ erhält man unabhängig von b aus folgenden Gleichungen:

$$1)\ \sin(c-x) = \frac{tg\beta \,.\, \sin x}{tg\alpha}, \text{ wobei } tg\,x = tg\,a \,.\, \cos\beta,$$

$$2)\ \sin(\gamma - y) = \frac{\cos\alpha \,.\, \sin y}{\cos\beta}, \text{ wofür } cotg\,y = \cos a \,.\, tg\beta \text{ ist.}$$

Es ist nämlich a) hinsichtlich der Seite c (nach §. 436.):

$$cotg\,a \,.\, \sin c - \cos c \,.\, \cos\beta = \sin\beta \,.\, cotg\,\alpha, \text{ also}$$

$$\sin c - \cos c \,.\, tg\,a \,.\, \cos\beta = tg\,a \,.\, \sin\beta \,.\, cotg\,\alpha.$$

Setzt man nun $tg\,a \,.\, \cos\beta = tg\,x$, so folgt

$$\sin(c-x) = tg\,a \,.\, \sin\beta \,.\, cotg\,\alpha \,.\, \cos x = \frac{tg\beta}{tg\alpha} \,.\, \sin x,$$

indem $tg\,a = tg\,x : \cos\beta$, und $tg\,x \,.\, \cos x = \sin x$ ist (§. 411, III.).

b) Hinsichtlich des Winkels γ hat man (§. 437.):

$$\cos\alpha = -\cos\beta \,.\, \cos\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a$$
$$= \cos\beta(\sin\gamma \,.\, \cos a \,.\, tg\beta - \cos\gamma)$$
$$= \frac{\cos\beta}{\sin y}(\sin\gamma \,.\, \cos y - \cos\gamma \,.\, \sin y) = \frac{\cos\beta}{\sin y} \,.\, \sin(\gamma - y),$$

wenn man $\cos a \,.\, tg\beta = cotg\,y$ setzt. Hieraus folgt aber die Formel 2).

§. 450.

Aufg. Aus den drei Winkeln eines sphärischen Dreieckes die drei Seiten desselben zu berechnen.

Aufl. Wird die halbe Summe der drei Winkel, d. i. $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = n$ gesetzt, so erhält man für eine Seite, und analog auch für die andern:

$$\text{I. } \sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos n \,.\, \cos(n-\alpha)}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}}, \text{ oder}$$

$$\text{II. } \cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(n-\beta) \,.\, \cos(n-\gamma)}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}}, \text{ oder}$$

$$\text{III. } tg\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos n \,.\, \cos(n-\alpha)}{\cos(n-\beta) \,.\, \cos(n-\gamma)}}.$$

Bew. Aus der §. 437. entwickelten Gleichung folgt

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \,.\, \cos\gamma}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}.$$

Wird dieser Werth von cos a in die Formel §. 413, XI. substituirt, so ergibt sich

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\sin\beta \,.\, \sin\gamma - \cos\alpha - \cos\beta \,.\, \cos\gamma}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}$$

$$= -\frac{\cos\alpha + \cos(\beta+\gamma)}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}$$

$$= -\frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}$$

$$= -\frac{2\cos n \,.\, \cos(n-\alpha)}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma},$$

wenn $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = n$, also $\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) = n-\alpha$ gesetzt wird. Kürzt man nun noch durch 2 ab und radizirt dann, so hat man die Gleichung I.

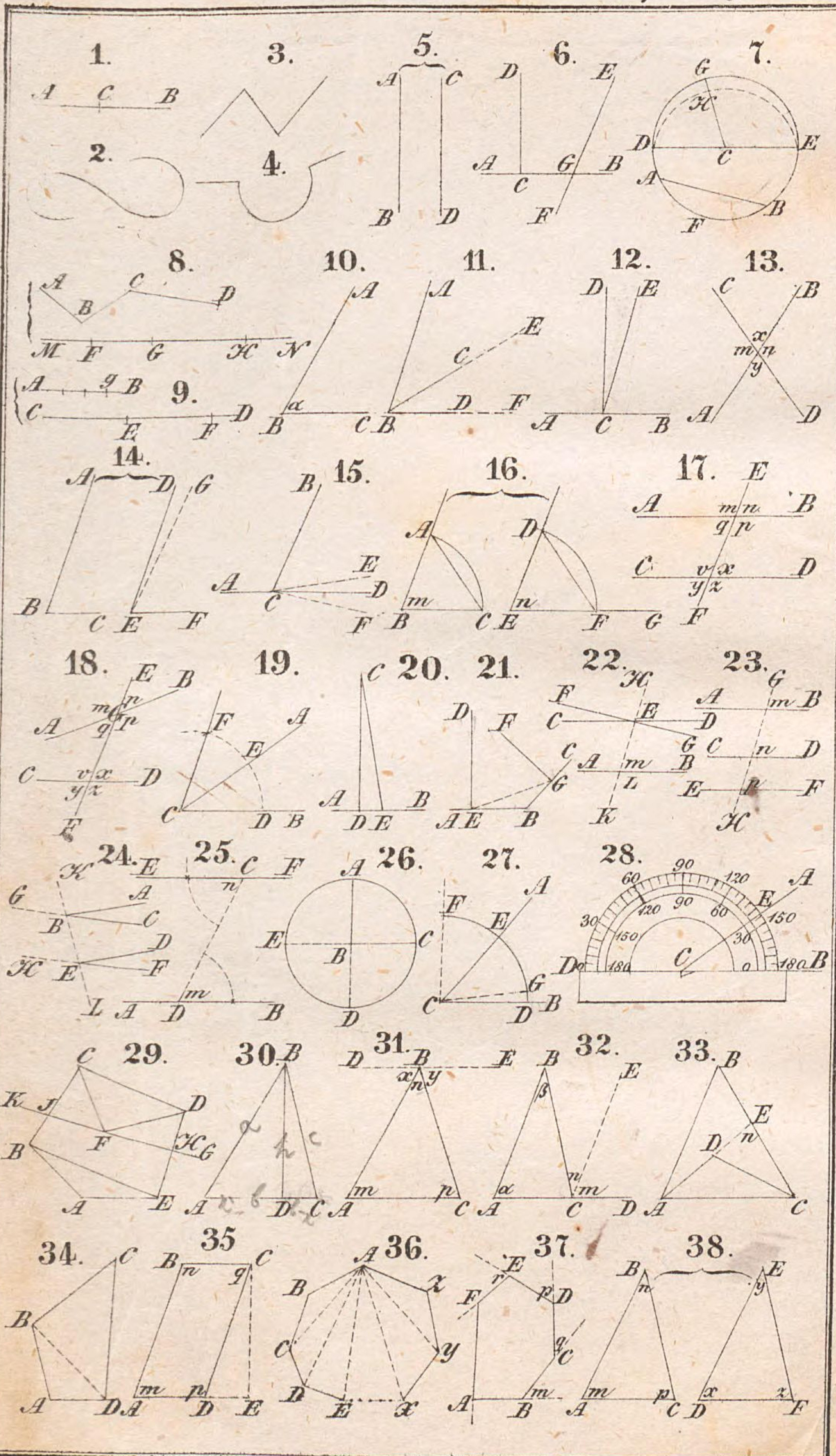
Auf dem §. 445. angegebenen Wege findet man auf ähnliche Weise die Formeln II. und III.

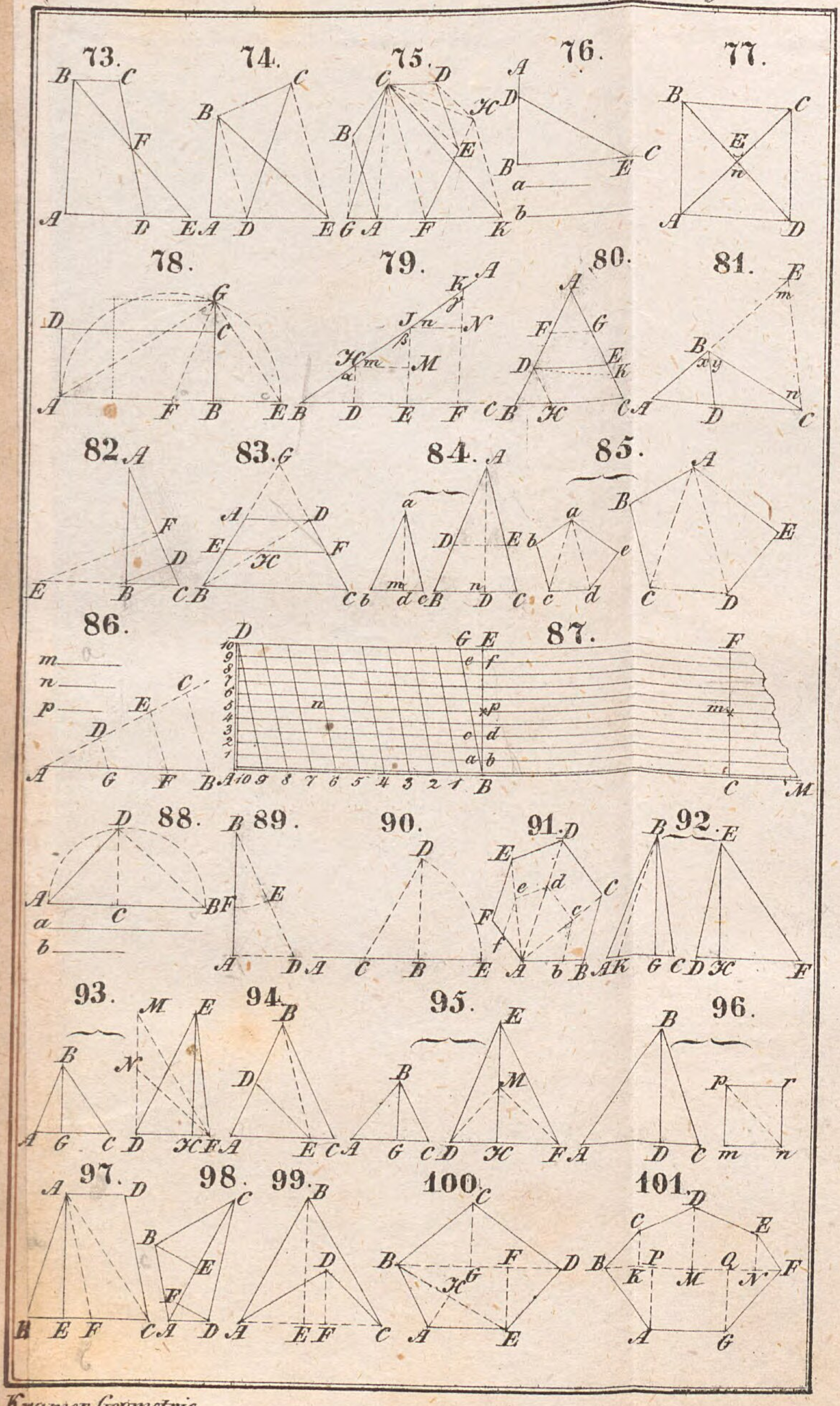
Anm. 1. Da stets $\alpha+\beta+\gamma$ ($=2n$) größer als 180°, aber kleiner als 540° ist (§. 311, Zus. 2.), so ist auch immer $n > 90°$, aber $n < 270°$; also cos n negativ. Obige Wurzeln werden daher nie imaginär, da die andern Faktoren (nach §. 408, II.) stets positiv sind.

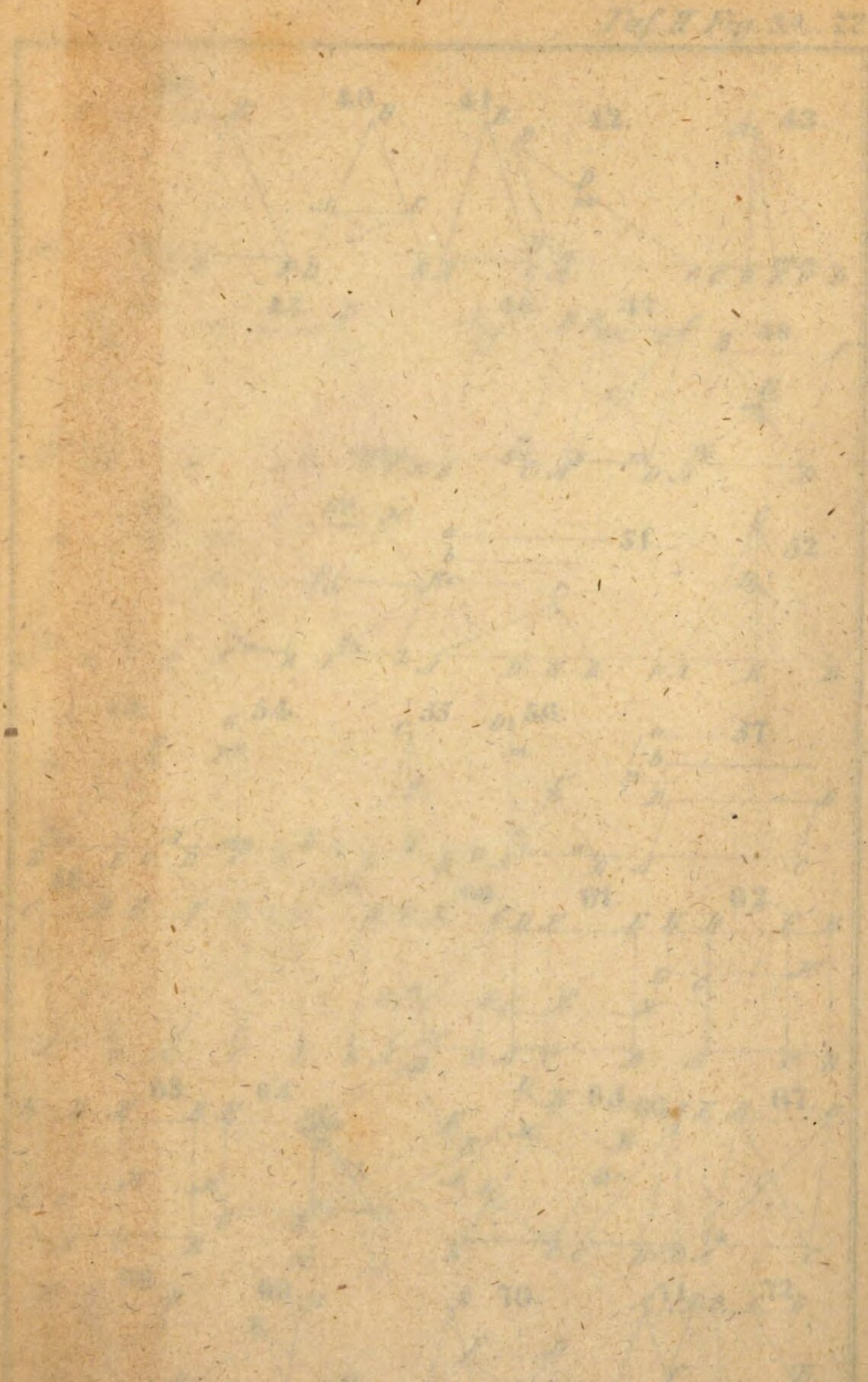
Anm. 2. Die Anmerkung §. 430. gilt in Bezug auf Formel III. auch hier.

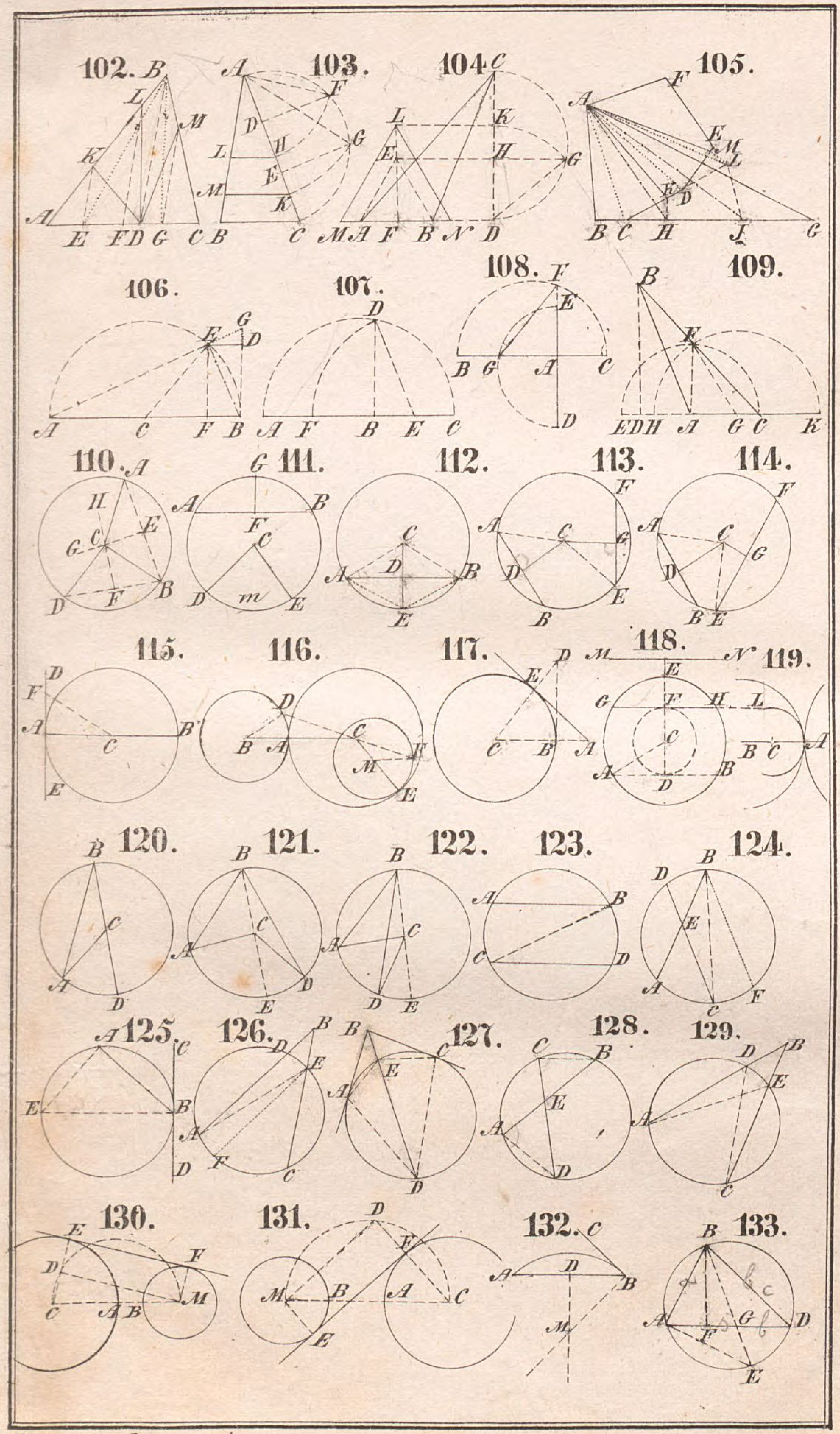
Anm. 3. Hinsichtlich der Bestimmung des Flächeninhaltes sphärischer Dreiecke sehe man §. 370.

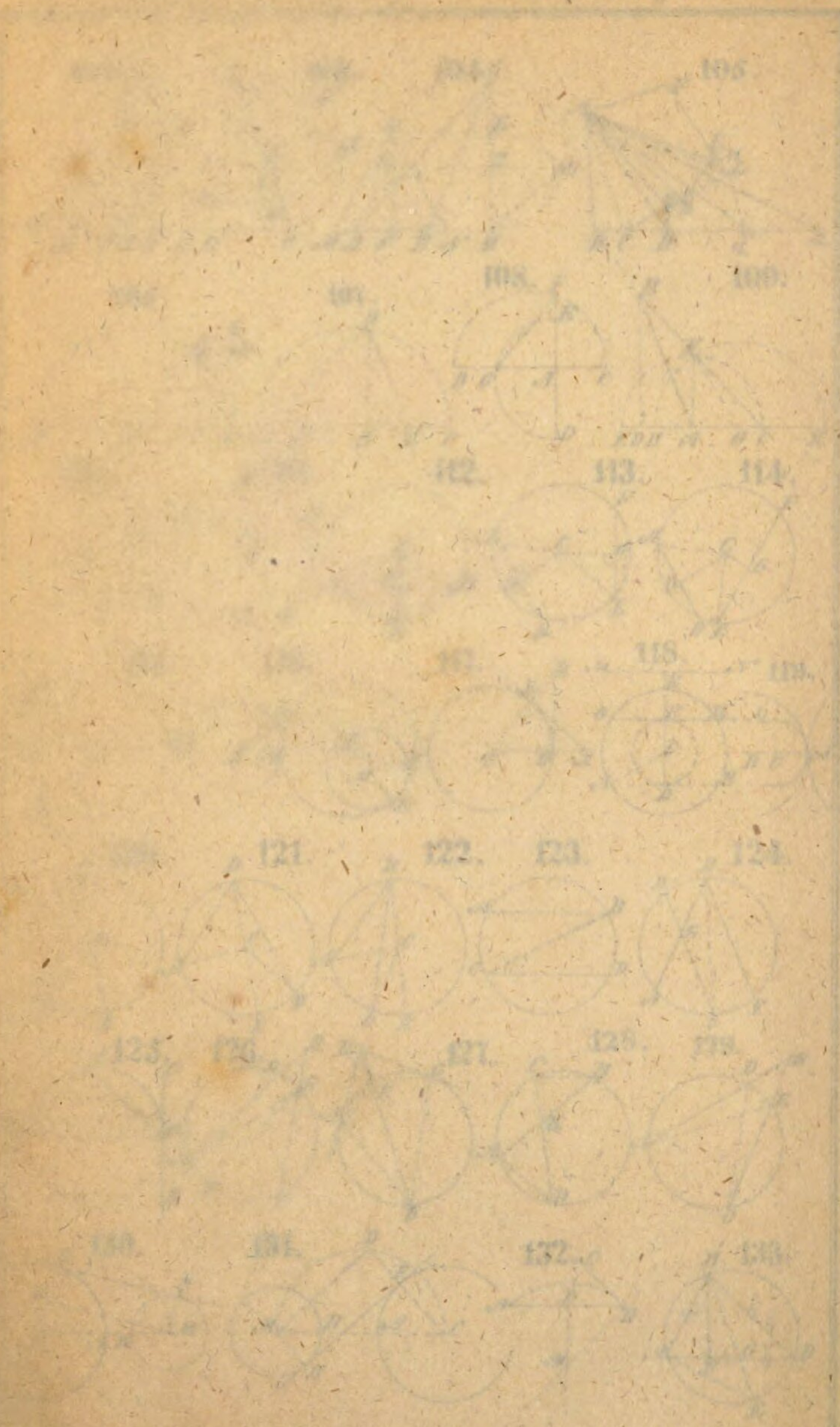
Druck von J. P. Himmer in Augsburg.

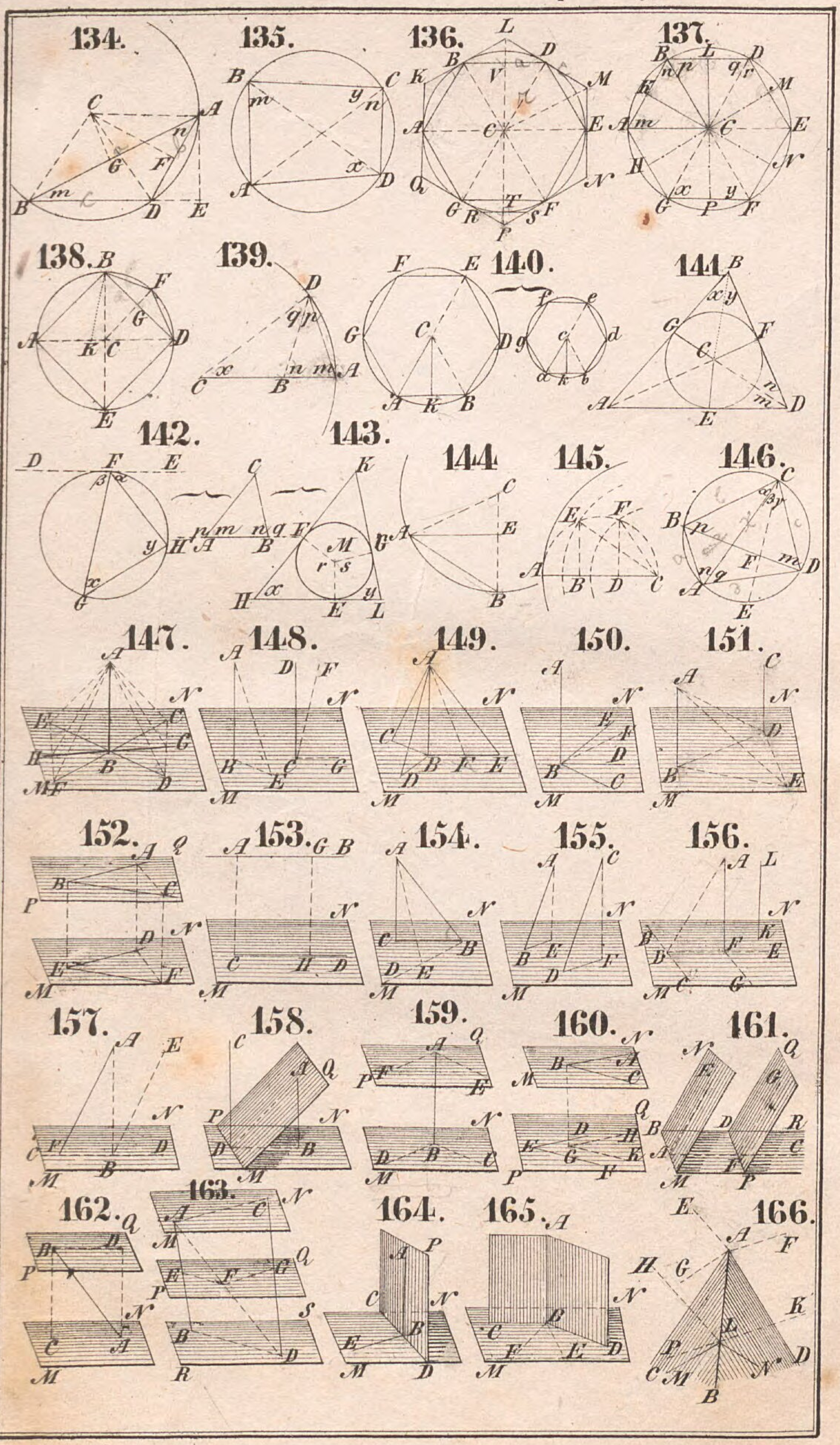

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35
36.
37.
38.

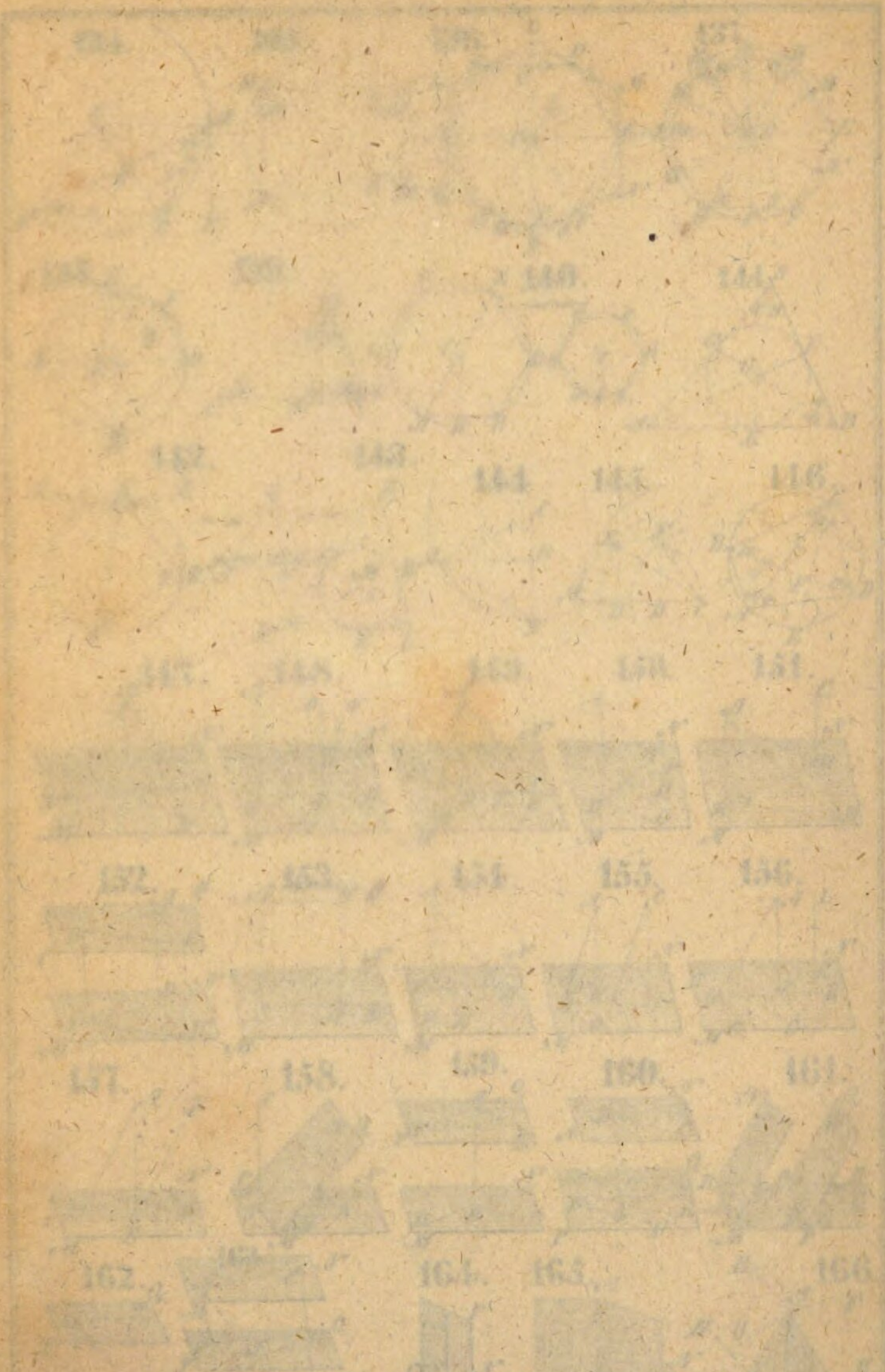

73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.
100.
101.

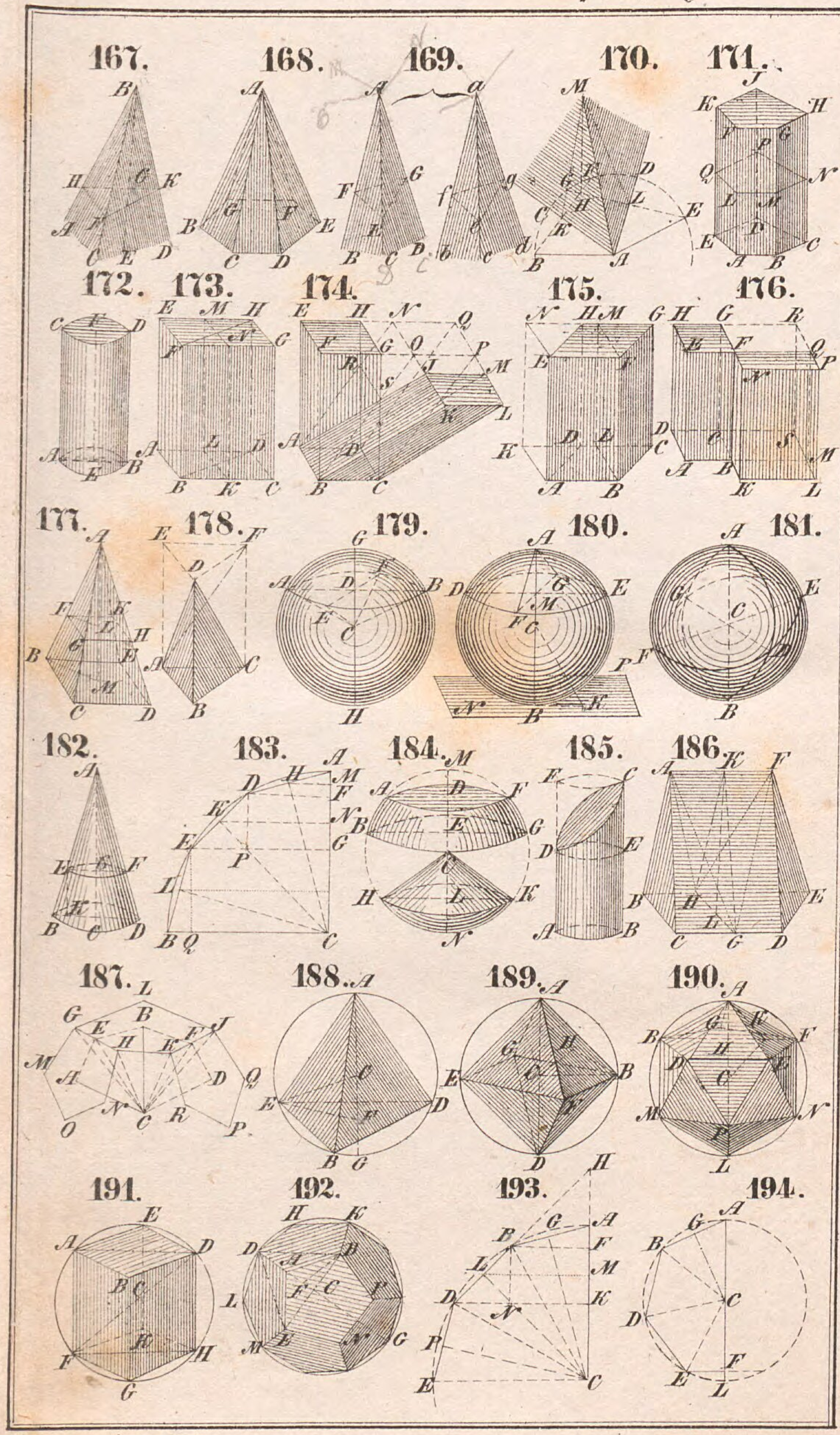


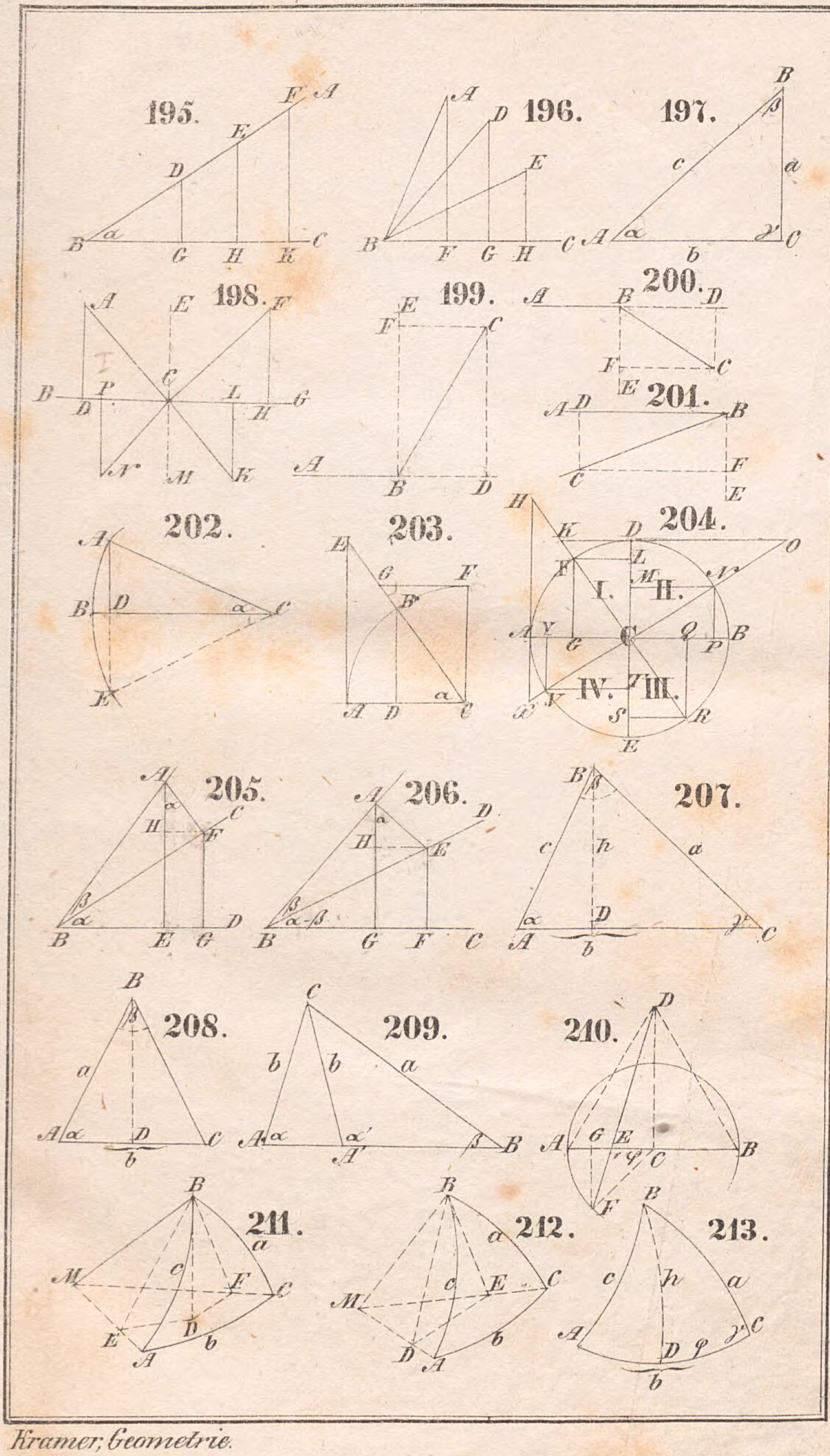

102.
103.
104
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.

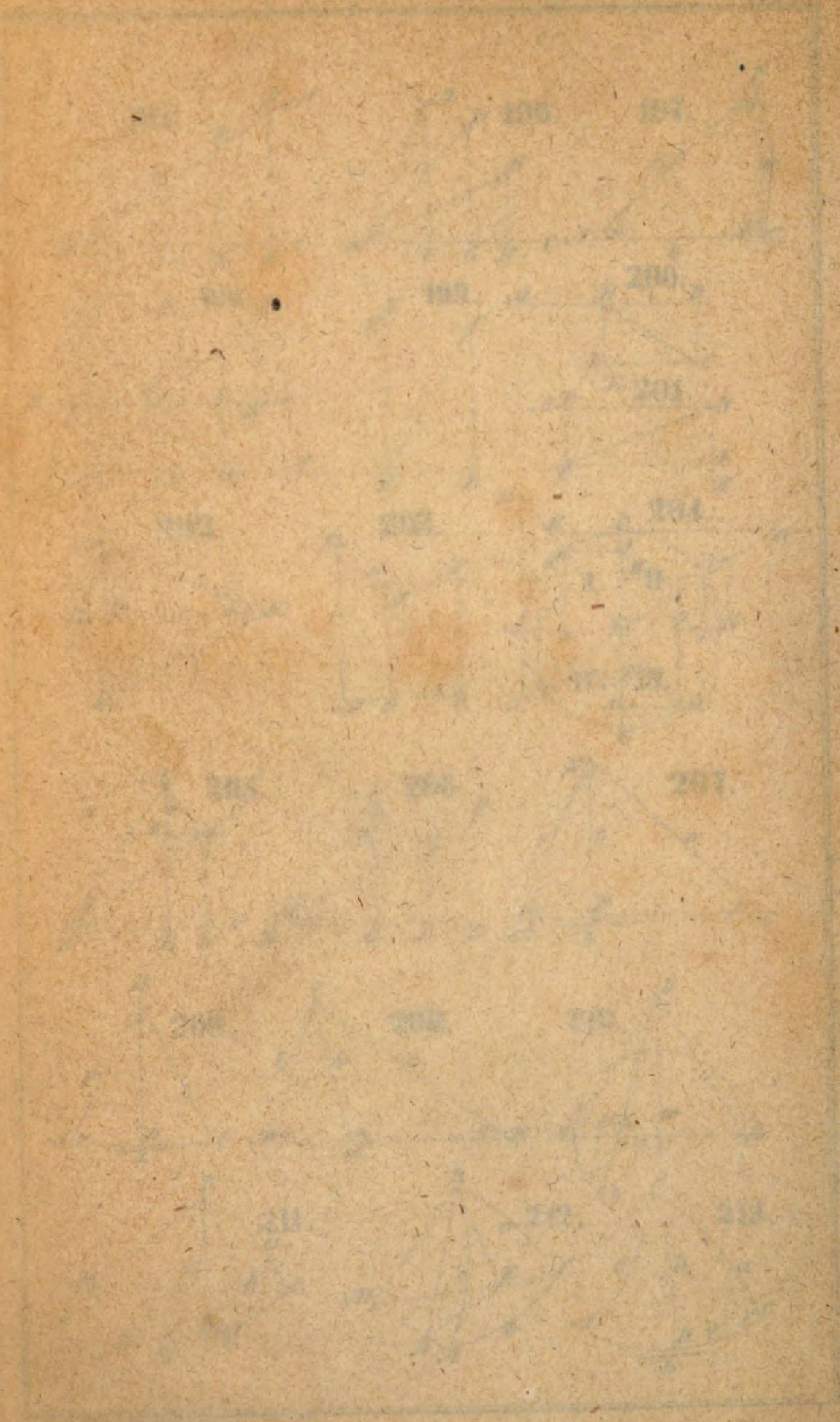

105.
108.
109.
112.
113.
114.
118.
119.
121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.


134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.
141.
142.
143.
144.
145.
146.
147.
148.
149.
150.
151.
152.
153.
154.
155.
156.
157.
158.
159.
160.
161.
162.
163.
164.
165.
166.




167.
168.
169.
170.
171.
172.
173.
174.
175.
176.
177.
178.
179.
180.
181.
182.
183.
184.
185.
186.
187.
188.
189.
190.
191.
192.
193.
194.


195.
196.
197.
198.
199.
200.
201.
202.
203.
204.
205.
206.
207.
208.
209.
210.
211.
212.
213.



Kramer, Philipp

Elementar-Mathematik für Gymnasien

Bd.: 2

Augsburg 1855